

Е.Н. ИЛЬЧЕВА  
Ю.А. КУДЕЯРОВ  
А.Н. МАТВЕЕВ

# МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИКИ



Е. Н. ИЛЬИЧЕВА, Ю. А. КУДЕЯРОВ,  
А. Н. МАТВЕЕВ

# МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИКИ

Под редакцией *А. Н. Матвеева*

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1981

УДК 535.076

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

Рецензенты:

проф. Л. В. Левшин;  
доц. В. А. Алешкович

Елена Николаевна Ильичева,  
Юрий Алексеевич Кудеяров,  
Алексей Николаевич Матвеев

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИКИ

Под редакцией А. Н. Матвеева

*Зав. редакцией* С. И. Зеленский

*Редактор* Ф. И. Горобец

*Переплет художника* А. А. Кущенко

*Технические редакторы* В. И. Овчинникова,  
К. С. Чистякова

*Корректоры* Н. В. Тютина, М. Б. Валетова

Тематический план 1980 г. № 109  
ИБ № 916

---

Сдано в набор 25.02.80. Подписано к печати 21.01.81. Л-98826  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная.  
Высокая печать. Усл. печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 14,41. Зак. 314  
Тираж 8400 экз. Цена 90 коп. Изд. № 656

---

Издательство Московского университета.  
103009 Москва, ул. Герцена, 5/7.  
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

**Ильичева Е. Н., Кудеяров Ю. А., Матвеев А. Н.** Методика решения задач оптики/  
Под ред. А. Н. Матвеева. — М.: Изд-во Моск.  
ун-та, 1981.—232 с. 72 ил.

В данном пособии представлены важнейшие типы задач по оптике и методы их решения, в соответствии с новой программой курса общей физики. Кроме традиционных вопросов подробно представлены фурье-оптика, дифракция (в рамках интеграла Кирхгофа), интерференция с учетом первой корреляционной функции, оптика движущихся сред и др.

И  $\frac{20405-046}{077(02)-81}$  109—80 1704050000

© Издательство Московского университета, 1981 г.

## Содержание

Предисловие и методические указания (А. Н. Матвеев)	4
Раздел I. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ (А. Н. Матвеев)	6
Раздел II. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ (Е. Н. Ильичева)	17
Раздел III. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД (Ю. А. Кудеяров)	29
Раздел IV. КОГЕРЕНТНОСТЬ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ (Ю. А. Кудеяров)	51
Раздел V. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА (Е. Н. Ильичева)	98
Раздел VI. РАЗЛОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТР. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ (Е. Н. Ильичева)	121
Раздел VII. ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И МЕТОДОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА (Е. Н. Ильичева)	134
Раздел VIII. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА И КРИСТАЛЛООПТИКА (Ю. А. Кудеяров)	165
Раздел IX. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ И МАГНИТООПТИКА (Ю. А. Кудеяров)	199
Раздел X. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. СПОНТАННОЕ И ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ (А. Н. Матвеев)	221
Раздел XI. ОПТИКА ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ (А. Н. Матвеев)	227



## **ПРЕДИСЛОВИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

В настоящее время в системе университетского образования теоретический материал сообщается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студента. На каждый час аудиторных занятий по курсу общей физики необходимо иметь примерно час или несколько больше самостоятельной работы студента. Причем по лекционному материалу и по лабораторным работам, как правило, имеются пособия, которые помогают студенту более эффективно организовать его самостоятельную работу. Однако пока нет пособий, которые помогли бы студенту научиться самостоятельно решать задачи. Ввиду недостатка времени на семинарах не удастся рассмотреть все важные типы задач и методы их решения. Настоящее пособие позволяет включить эти не охваченные семинарами вопросы в круг обязательных точно так же, как это делается в отношении теоретического материала, который не охвачен лекциями, но входит в обязательную программу.

Пособие составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться для самостоятельных занятий. Весь материал курса разбит на разделы. Разбор задач всех разделов проводится по единой схеме, причем каждый раздел можно прорабатывать независимо от других.

Рекомендуется следующий порядок изучения каждого из разделов. В первом подразделе («Теоретический материал») перечисляются те вопросы, которые студент должен знать прежде, чем приступить к проработке задач раздела.

Во втором подразделе («Вопросы по теоретическому материалу») содержатся вопросы, которые позволяют студенту произвести самоконтроль усвоения теоретического материала. При выделении типов задач, встречающихся в курсе, авторы исходили главным образом из методической необходимости иметь классификацию задач, которая позволяла бы упорядочить подходы к их решению. Студенту рекомендуется прежде всего просмотреть и продумать третий подраздел «Основные типы задач и решений» в целом.

В каждом конкретном случае необходимо добиться четкого представления, что исходные данные являются необходимыми и достаточными, т. е. что задача не является ни переопределенной, ни недоопределенной. После этого можно приступить к примерам. Рекомендуется следующий порядок работы: 1) прочитать условие задачи и убедиться, что задача действительно относится к рассматриваемому типу; 2) вернуться к соответствующему подразделу и, прочитав общую формулировку методов решения, попытаться самостоятельно решить задачу соответствующим методом; 3) проверить правильность решения, сравнив его с решением, приводимым в тексте. Если задачу не удалось решить самостоятельно (несмотря на то, что метод решения представляется ясным), проработать подробно решение по тексту.

Подраздел 4 содержит контрольные вопросы. Если ответ на некоторые вопросы вызывает трудности, необходимо возвратиться к соответствующим местам ранее проработанного материала.

Подраздел 5 содержит задачи для самостоятельного решения. При полной проработке всего предшествующего материала данного раздела эти задачи не должны вызвать затруднения. Для контроля правильности решения приведены ответы.

При составлении пособия авторы стремились использовать наиболее характерные и типичные задачи. С этой целью наряду с введением новых задач заимствовались также задачи из существующих учебников, задачников и других источников.

В содержании книги отразились изменения, внесенные в раздел оптики новой программой курса общей физики. Поэтому наряду с традиционными задачами и методами решения излагаются задачи и методы решения, связанные с фурье-преобразованиями, более широко учитывается некогерентность излучения, принимается во внимание частичная когерентность излучения. Благодаря этому достаточно подробно представлена фурье-оптика, вопросы дифракции рассмотрены в рамках интеграла Кирхгофа, а вопросы интерференции — с учетом первой корреляционной функции. Во многих случаях вместо монохроматических волн рассматриваются модулированные волны, импульсы света или излучение со случайно распределенными фазами. Уделено также внимание оптике движущихся сред и ряду вопросов, связанных с квантовым характером излучения.

## Раздел I

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

## 1. Теоретический материал

Уравнения Максвелла для напряженностей электромагнитного поля в волне как в вакууме, так и в среде. Плоские, сферические и цилиндрические волны. Скорость волн. Соотношение между амплитудами и фазами векторов напряженности в плоской волне при распространении в вакууме, диэлектрике и проводнике. Волновой вектор. Плотность электромагнитной энергии в плоской волне, вектор Пойнтинга. Граничные условия для отражения электромагнитных волн на границе между диэлектриками и между диэлектриками и проводниками. Поле излучения линейного осциллятора, поляризация, поток энергии и мощность излучения. Поле излучения рамки с током и его характеристики. Излучение ансамбля осцилляторов. Когерентность излучения. Характеристика естественного света. Время излучения. Естественная ширина линии. Форма линии. Механизмы однородного и неоднородного уширения линий излучения. Доплеровское уширение. Ударное уширение. Флуктуации интенсивности и фазы. Время когерентности. Длина когерентности. Корреляционная функция первого порядка. Когерентность с точки зрения квантовых представлений. Модулированные волны и их фурье-анализ. Короткие импульсы света.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Получите из уравнений Максвелла выражение для скорости распространения электромагнитных волн.

2.2. Какие физические факторы приводят к тому, что скорость электромагнитных волн в среде меньше, чем в вакууме?

2.3. При каких условиях участок сферической или цилиндрической волны может рассматриваться как плоская волна?

2.4. Что произойдет, если направление одного из векторов плоской волны (например,  $\vec{E}$ ) изменить на обратное?

2.5. Как связана плотность энергии в электромагнитной волне с потоком энергии?

- 2.6. Каково соотношение фаз векторов плоской электромагнитной волны при распространении в диэлектрике и в проводнике?
- 2.7. В чем состоит физическая причина поглощения электромагнитных волн при распространении в проводящих средах?
- 2.8. Каков механизм отражения электромагнитных волн на границе между диэлектриками и на границе диэлектрик — проводник?
- 2.9. Каким соотношением связаны поля излучения линейного осциллятора и рамки с током?
- 2.10. Как мощность излучения осциллятора зависит от частоты?
- 2.11. В чем состоят характерные особенности излучения системы осцилляторов и при каких условиях эти особенности проявляются?
- 2.12. Опишите качественно методы получения направленного излучения.
- 2.13. Что такое когерентность излучения?
- 2.14. Опишите способы получения когерентных волн в акустике и в оптике.
- 2.15. Каким образом в классической теории время излучения связано с естественной шириной линии? Как найти форму линии? Как эта форма линии обычно называется? Почему лоренцева форма линии соответствует механизму однородного уширения?
- 2.16. Что такое доплеровское и ударное уширение линий излучения? Каково соотношение между порядками величин естественной, доплеровской и ударной ширины линий? Почему доплеровское уширение принадлежит к категории неоднородного уширения линий?
- 2.17. Можете ли Вы дать сравнительную характеристику особенностей лоренцевой и гауссовской форм линий?
- 2.18. Что такое ширина уровня? Как ширина уровня связана со временем жизни возбужденного состояния? Как из этих связей получается ширина линии излучения? Чем в квантовом случае определяется форма линии излучения?
- 2.19. Что такое время когерентности? Как оно связано со спектральной шириной светового пучка?
- 2.20. Как длина когерентности связана со временем когерентности?
- 2.21. Для большинства практически используемых световых пучков длина когерентности много больше или меньше длин волн света, входящих в пучок? Обоснуйте свой ответ рассмотрением связи длины когерентности с характеристиками пучка света.
- 2.22. Что такое корреляционная функция первого порядка и как она зависит от пространственного и временного расстояния между рассматриваемыми точками?
- 2.23. В чем заключается смысл когерентности с точки зрения представлений о пучках света как совокупностях фотонов?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

**3.1. (1-й тип).** Найти электромагнитные волны, излучаемые при заданном движении электрических зарядов и заданных токах.

**Метод решения.** Необходимо решить уравнения Максвелла для заданных движений зарядов и электрических токов. Этот тип задач широко встречается в курсе электродинамики. В курсе общей физики встречаются лишь отдельные задачи этого типа.

**3.2. (2-й тип).** Зная напряженности полей в плоской волне, найти поток энергии и, наоборот, зная поток, найти напряженности. Охарактеризовать явления, которые определяются напряженностями полей в волне или плотностью потока энергии, например световое давление, ЭДС индукции, наводимой волной, и т. д.

**Метод решения.** Связь напряженностей с потоком энергии дается вектором Пойнтинга. Для характеристики явлений, определяемых напряженностями электромагнитного поля или плотностью потока электромагнитной энергии, пользоваться соответствующими формулами, однако обязательно приняв во внимание быструю переменность этих напряженностей.

**3.3. (3-й тип).** Определение формы суммарной линии, если формы слагаемых линий известны, и нахождение уширения линий.

**Метод решения.** Используем формулу фурье-анализа

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi) F_2(\omega + \omega_0 - \xi) d\xi,$$

где  $\omega_0$  есть общая центральная частота слагаемых линий, а также прямой учет факторов, влияющих на разброс частот излучения.

**3.4. (4-й тип).** Определение спектрального состава излучения по характеру модуляции волн.

**Метод решения.** Использование преобразования Фурье.

**3.5. (5-й тип).** Задачи на вычисление корреляционной функции первого порядка.

**Метод решения.** Значение корреляционной функции первого порядка, записанное в соответствии с ее определением, вычислить с учетом статистических свойств излучений в конкретной задаче.

#### б) ПРИМЕРЫ

##### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Рассмотреть излучение линейного осциллятора и рамки с током.



Решение. Необходимо рассмотреть решение по одному из учебников.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Воздух начинает ионизоваться при напряженности электрического поля  $E \approx 30$  кВ/см. При какой плотности потока энергии плоских электромагнитных волн достаточно малой частоты в воздухе может наступить ионизация?

Решение. При не очень большой частоте электромагнитных волн можно считать, что процесс ионизации происходит за время, много меньшее периода колебаний напряженностей в волне. Поэтому условием ионизации можно считать равенство амплитуды волны и ионизационной напряженности. Для получения ответа через плотность потока энергии необходимо воспользоваться формулой Пойнтинга

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \approx 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Вт/м}^2 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кВт/см}^2,$$

где учтено, что векторы напряженностей в электромагнитной волне изменяются по гармоническому закону, и принято во внимание, что среднее значение квадрата синуса (или косинуса) равно  $1/2$ .

**3.2.2.** Плоская поляризованная электромагнитная волна с круговой частотой  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$  падает с ребра на рамку из проводника, причем вектор  $\vec{B}$  волны направлен перпендикулярно плоскости рамки. Линейные размеры рамки малы по сравнению с длиной волны. Площадь рамки  $S = 100 \text{ см}^2$ , средняя плотность потока энергии в волне  $\langle P \rangle = 1 \text{ Вт/м}^2$ . Найти максимальную ЭДС индукции, наводимую в контуре.

Решение. По закону электромагнитной индукции Фарадея имеем

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi = SB = S\mu_0 H$ ,  $H = H_0 \cos \omega t$ ,  $E = E_0 \cos \omega t$ .

Поэтому

$$\mathcal{E}_{\text{инд}}^{\text{max}} = S\mu_0 \omega H_0 = \sqrt{2\langle P \rangle \mu_0 (\epsilon_0/\mu_0)^{1/4}} S\omega \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ В},$$

где учтено соотношение электрического и магнитного векторов в плоской волне и их связь с потоком энергии.

**3.2.3.** Плотность потока энергии излучения лазера составляет  $1 \text{ Вт/см}^2$ . Какова амплитуда вектора напряженности электрического поля в этой волне?

Решение. Выражая амплитуду напряженности  $E_0$  через вектор потока  $\langle P \rangle$ , получаем

$$E_0 = \left( \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/4} \sqrt{2\langle P \rangle} = 2700 \text{ В/м}.$$

### 3-й тип задач (3.3)

3.3.1. Пусть некоторые источники дают лоренцевские линии с уширениями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Найти форму суммарной линии и ее уширение.

Решение. Имеем

$$F_1(\omega) = \frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma_1/2)^2}, \quad F_2(\omega) = \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma_2/2)^2}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F_{1+2}(\omega) &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{[(\omega_0 - \xi)^2 + (\gamma_1/2)^2][(\omega - \xi)^2 + (\gamma_2/2)^2]} = \\ &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + [(\gamma_1 + \gamma_2)/2]^2}, \end{aligned}$$

т. е. суммарная линия также является лоренцевской с уширением  $\gamma_{1+2} = \gamma_1 + \gamma_2$ , равным сумме уширений слагаемых линий.

3.3.2. Оценить доплеровскую ширину линии Бальмера ( $\lambda = 6563 \text{ \AA}$ ) в спектре атома водорода при температуре  $500 \text{ K}$ .

Решение. По эффекту Доплера

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}.$$

С другой стороны

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где  $m$  — масса атома водорода,  $k$  — постоянная Больцмана. Следовательно,

$$\delta\lambda = (3 kT/m)^{1/2} \lambda/c = 0,067 \text{ \AA}.$$

### 4-й тип задач (3.4)

3.4.1. Найти спектральный состав периодической последовательности прямоугольных импульсов продолжительности  $\tau$ , повторяющихся с периодичностью  $T$ . Амплитуда, импульсов  $U_0$  (рис. 1).

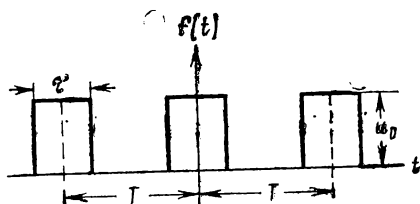


Рис. 1

Решение. Ввиду четности функции

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_1 t,$$

где

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 dt = \frac{2\tau U_0}{T} = \frac{1}{\pi} \tau U_0 \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 2 \frac{U_0}{T} \left[ \frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1 t} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} =$$

$$= \frac{\tau \omega_1 U_0}{\pi} \frac{\sin(n\omega_1 \tau/2)}{(n\omega_1 \tau/2)}.$$

**3.4.2.** Найти спектральный состав одиночного прямоугольного импульса продолжительностью  $\tau$  и амплитуды  $U_0$ .

Решение. В этом случае используем интеграл Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Поэтому спектральная плотность равна

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = U_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = U_0 \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}.$$

**3.4.3.** Оценить естественную ширину линии излучения для  $\lambda = 0,6$  мкм (6000 Å), если время излучения  $\tau = 10^{-8}$  с.

Решение. Между шириной частот  $\delta\nu$ , связанных с цугом волн, и временной протяженностью цуга  $\tau$  существует соотношение  $\delta\nu\tau \approx 1$ . Из соотношения  $\lambda\nu = c$  получаем  $\delta\lambda = -\lambda^2/\tau c$ . Для  $\lambda = 6000$  Å находим  $\delta\lambda = 0,00115$  Å.

#### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Найти корреляционную функцию первого порядка для плоской световой монохроматической волны, распространяющейся в направлении положительных значений оси  $z$ :

$$E(z, t) = E_0 \exp i(kz - \omega_0 t + \varphi).$$

Решение. По определению корреляционной функции первого порядка имеем

$$K_1 = \langle E^*(z_1, t_1) E(z_2, t_2) \rangle = \langle E_0^2 \exp i\omega_0 \tau \rangle,$$

где

$$\tau = t_1 - t_2 - (z_1 - z_2)/c.$$

Поскольку в рассматриваемом случае пучок света никакой статистической неопределенностью не обладает, усреднение не изме-

няет усредняемую величину. Отсюда для искомой функции получаем

$$K_1 = 2 \langle P \rangle \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \exp i \omega_0 \tau, \quad (1)$$

где учтена связь между средней величиной потока  $\langle P \rangle$  и амплитудой электрического вектора  $E_0$  электромагнитной волны:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

**3.5.2.** Найти корреляционную функцию первого порядка для хаотического светового излучения с лоренцевской формой линии, распространяющейся в виде совокупности плоских волн в направлении положительных значений оси  $z$ :

Решение. Для упрощения расчета будем считать излучение заключенным в полости очень большой длины (много большей длины когерентности). Границы полости можно считать прозрачными. Тогда электрическое поле можно представить в некоторой точке  $z$  внутри полости в момент времени  $t$  в виде суммы нормальных мод излучения

$$E(z, t) = \sum_k E_k \exp i(kz - \omega_k t),$$

где  $\omega_k = ck$ . Амплитуды  $E_k$  — комплексные величины, абсолютное значение которых и фаза определяются только статистически.

По определению корреляционной функции первого порядка

$$K_1 = \langle E^*(z_1, t_1) E(z_2, t_2) \rangle = \sum_{k, k'} \langle E_k^* E_{k'} \rangle \exp i(-kz_1 + \omega_k t_1 + k'z_2 - \omega_{k'} t_2).$$

В силу того что амплитуды  $E_k$  и  $E_{k'}$  при  $k \neq k'$  — случайные независимые величины с нулевыми средними значениями, имеем

$$\langle E_k^* E_{k'} \rangle = \langle |E_k|^2 \rangle \delta_{kk'}. \quad (1)$$

Поэтому выражение для первой корреляционной функции принимает вид

$$K_1 = \sum_k \langle |E_k|^2 \rangle \exp i \omega_k \tau, \quad (2)$$

где  $\tau = t_1 - t_2 - (z_1 - z_2)/c$ .

Поскольку по условию задачи излучение имеет лоренцевскую форму линии, должно иметь место соотношение

$$\langle |E_k|^2 \rangle = A \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega_k)^2 + \gamma^2},$$

где  $\gamma$  — лоренцевская ширина линии, а  $A$  — константа, определяемая величиной потока (усредненной). Имеем

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle |E(z, t)|^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{kk'} \langle E_k^* E_{k'} \rangle \exp i \{ -(k - k')z + (\omega_k - \omega_{k'})t \} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_k \langle |E_k|^2 \rangle,\end{aligned}$$

где учтено условие (2). При большой длине полости  $L$  можно перейти от суммы по  $k$  к интегралу по обычному правилу

$$\sum_k \rightarrow \frac{L}{\pi} \int_0^\infty dk \rightarrow \frac{L}{\pi c} \int_0^\infty d\omega_k.$$

Тогда получим для определения  $A$  равенство ( $\gamma \ll \omega_0$ )

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{AL}{\pi c} \int_0^\infty \frac{\gamma d\omega_k}{(\omega_0 - \omega_k)^2 + \gamma^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{AL}{c}.$$

Следовательно,

$$\langle |E_k|^2 \rangle = \frac{2c}{L} \langle P \rangle \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega_k)^2 + \gamma^2}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (2) и переходя от суммирования к интегрированию, находим

$$K_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \langle P \rangle \gamma \int_0^\infty \frac{\exp(i\omega_k \tau) d\omega_k}{(\omega_0 - \omega_k)^2 + \gamma^2}.$$

С помощью теории вычетов нетрудно вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\gamma \exp(i\xi \tau) d\xi}{(\omega_0 - \xi)^2 + \gamma^2} = \pi \exp(i\omega_0 \tau - \gamma |\tau|).$$

Поэтому выражение для первой корреляционной функции окончательно принимает вид

$$K_1 = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \langle P \rangle \exp(i\omega_0 \tau - \gamma |\tau|). \quad (4)$$

При бесконечно узкой линии  $\gamma=0$  это выражение переходит в формулу (1) задачи 3.5.1. Никакой статистической неопределенности в излучении и никакого разброса частот нет. Мы имеем чисто монохроматическую плоскую волну.



## 4. Контрольные вопросы

4.1. На заряженную частицу, движущуюся со скоростью  $v$ , падает плоская электромагнитная волна. В каком количественном соотношении находятся между собой абсолютные величины сил, действующих на частицу со стороны электрического и магнитного полей волны?

4.2. Откуда следует, что плоская электромагнитная волна является плоской во всех инерциальных системах координат?

4.3. Можете ли Вы доказать, что сферическая электромагнитная волна является сферической во всех инерциальных системах координат?

4.4. Каким образом при распространении электромагнитной волны проявляется закон электромагнитной индукции Фарадея и свойства токов смещения?

4.5. Сколькоими независимыми поляризациями характеризуется световая волна?

4.6. Выпишите основные соотношения между векторами напряженностей плоской электромагнитной волны и волновым вектором.

4.7. Как зависит плотность потока электромагнитной энергии в зависимости от расстояния для плоских, сферических и цилиндрических электромагнитных волн?

4.8. Напишите формулу, связывающую плотность потока энергии с напряженностями полей в электромагнитной волне. Какие изменения вносятся в эту формулу, если речь идет не о мгновенных значениях соответствующих величин, а о средних значениях по многим периодам колебаний?

4.9. В каком соотношении между собой находятся поля излучения линейного осциллятора и рамки с током? Как зависит мощность их излучения от частоты?

4.10. При каких условиях излучение ансамбля осцилляторов отличалось бы от суммы излучений отдельных осцилляторов, если бы они излучали независимо? В чем состоят физические факторы, обуславливающие эти отличия? Как обстоит вопрос с законом сохранения энергии?

4.11. Что такое когерентность, время когерентности, длина когерентности? Что такое частичная когерентность, каково количественное выражение степени когерентности?

4.12. На каких временных интервалах можно обнаружить флуктуации интенсивности хаотического света? От чего зависит величина этих интервалов?

4.13. Доплеровское уширение в обычных условиях примерно на два порядка больше естественной ширины линии. Каким образом можно наблюдать естественную форму линии?

4.14. Как ударное уширение в газах зависит от давления?

4.15. Что означает равенство нулю корреляционной функции первого порядка?

4.16. Объясните физические причины той зависимости корреляционной функции первого порядка от ширины лоренцевской линии, которая была получена в задаче 3.5.2?

4.17. Возьмите отрезок синусоиды конечной длины и рассмотрите ее спектральный состав. Будет ли спектральный состав одинаков, когда синусоида, имеющая, например, целое число периодов, начинается и кончается при нулевых и максимальных отклонениях? В каком случае высшие гармоники присутствуют с большей интенсивностью? На основе каких соображений можно было бы дать правильный ответ без вычислений?

4.18. Напишите основное соотношение между временными и частотными протяженностями импульсов света. Что означает знак неравенства в этом соотношении? От чего зависит сила этого неравенства?

4.19. Зависит ли спектр некоторой функции, отличной от нуля на конечном отрезке времени, от положения начала отсчета времени относительно этого отрезка? Что означает эта зависимость? Проявляется ли она в физических явлениях?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти среднюю мощность излучения рамки, через которую проходит ток  $I = I_0 \cos \omega t$ , если  $I_0 = 10$  А,  $S = 100$  см<sup>2</sup>,  $\omega = 10^8$  с<sup>-1</sup>.

Ответ.  $\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c^3} \omega^4 I_0^2 S^2 = 0,124$  Вт.

5.2. Найти максимальную величину плотности потока излучения в плоскости рамки в условиях задачи 5.1 на расстоянии 200 м от нее.

Ответ.  $P_{\max} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^4 I_0^2 S^2}{r^2} = 0,47 \cdot 10^{-5}$  Вт/м<sup>2</sup>.

5.3. Какой величины должно быть плечо диполя  $l$  для того, чтобы мощность его излучения равнялась мощности излучения рамки в задаче 5.2? Частота колебаний диполя равна частоте колебаний тока в рамке, а величина каждого из зарядов диполя равна  $q = 10^{-4}$  К.

Ответ.  $l = I_0 S / qc = 3,3 \cdot 10^{-4}$  м = 0,33 мм.

5.4. Круговая частота плоской электромагнитной волны равна  $\omega = 10^9$  с<sup>-1</sup>, а величина  $B$  магнитного вектора равна  $10^{-6}$  Тл. Найти длину волны  $\lambda$ , величину электрической напряженности  $E$  в волне и средний поток энергии  $\langle P \rangle$ .

Ответ.  $\lambda = 1,87$  м,  $E = 3000$  В/м,  $\langle P \rangle = 1200$  Вт/м<sup>2</sup>.

5.5. Точечный источник монохроматических миллиметровых электромагнитных волн, расположенный далеко от поверхности земли, на расстоянии 10 км создает максимальное поле 1 В/м. Пренебрегая отражением волн от земли, вычислить величину максимального магнитного поля  $B$  волны и мощность  $\langle P \rangle$  передатчика.

О т в е т.  $B=3,3 \cdot 10^{-9}$  Тл,  $\langle P \rangle = 1670$  кВт.

5.6. Имеются две гауссовские линии с шириной  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Найти полную линию и определить ее ширину  $\Delta$ .

О т в е т. Полная линия является также гауссовской, ширина которой равна  $\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$ .

5.7. Найти спектр периодически повторяющихся пилообразных импульсов. На периоде  $T$  форма импульса дается функцией  $f(t) = U_0 (1-t/T)$ ,  $0 < t < T$ ;  $f(t) = f(t+T)$ .

О т в е т.

$$f(t) = U_0 + \frac{U_0}{\pi} \left\{ \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \dots \right\}, \quad \omega_1 = 2\pi/T.$$

5.8. Найти спектр периодически повторяющихся треугольных импульсов

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{2t}{T} & \text{при } -\frac{T}{2} < t < 0, \\ +\frac{2t}{T} & \text{при } 0 < t < T/2. \end{cases} \quad f(t) = f(t+T).$$

О т в е т.

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos \omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_1 t + \dots \right).$$

5.9. Найти спектр гармонической волны с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $A$  и продолжительностью по времени от  $-\tau/2$  до  $\tau/2$ :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\tau/2, \\ Ae^{i\omega_0 t} & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t > \tau/2. \end{cases}$$

О т в е т.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = A\tau \frac{\sin \left[ \frac{(\omega_0 - \omega)\tau}{2} \right]}{\frac{(\omega_0 - \omega)\tau}{2}}.$$

5.10. В одномерном поле создан стабильный световой пучок, в котором отфильтрованы две моды, в результате чего электрическое поле имеет вид

$$E(z, t) = E_1 e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + E_2 e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}.$$

Найти корреляционную функцию первого порядка.

О т в е т.

$$K_1 = \langle E^*(z_1, t_1) E(z_2, t_2) \rangle = E_1^2 e^{i\omega_1 \tau} + E_2^2 e^{i\omega_2 \tau}, \\ \tau = t_1 - t_2 - (z_1 - z_2)/c.$$

## Раздел II

# ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

### 1. Теоретический материал

Геометрическая оптика как предельный случай физической оптики при  $\lambda \rightarrow 0$ . Пределы применимости законов геометрической оптики.

Принцип Ферма. Законы распространения, преломления и отражения света. Световые лучи; уравнение эйконала. Гомоцентричность пучков. Сопряженные точки и плоскости. Преломление света на сферической поверхности. Инвариант Аббе. Фокусы сферической поверхности, условие Лагранжа—Гельмгольца.

Центрированная оптическая система. Кардинальные точки и плоскости центрированной системы. Линза. Формула линзы. Оптическая сила линзы. Построение изображения в центрированной оптической системе (оптика Гаусса). Линейное и угловое увеличение системы. Телескоп. Микроскоп.

Аберрации оптических систем и пути их исправления. Сферические аберрации. Астигматизм косых пучков. Апланатизм. Условие синусов Аббе. Физическое толкование условия синусов Аббе. Апланатические объективы. Хроматические аберрации. Коэффициент дисперсии. Ахроматизация линз. Апохроматы. Световые лучи в неоднородных средах.

§

### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Почему при переходе от законов физической оптики к геометрической оптике существенно  $\lambda \rightarrow 0$ ?

2.2. Введите понятие луча в геометрической оптике.

2.3. Какой пучок называется параксиальным?

2.4. Вычислите фокусные расстояния сферической преломляющей поверхности.

2.5. Найдите положение главных плоскостей сферической преломляющей поверхности.

2.6. Воспользовавшись условием Лагранжа—Гельмгольца, покажите, что  $f/f' = -n/n'$ .

2.7. Запишите инвариант Аббе для отражающей сферической поверхности.

2.8. Может ли двояковыпуклая линза быть рассеивающей?

2.9. Может ли быть собирающей двояковогнутая линза?

2.10. Может ли толстая линза служить телескопической системой?

2.11. Найдите фокусное расстояние толстой линзы толщиной  $d$ , ограниченной сферическими поверхностями с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  и показателем преломления  $n$ .

2.12. Где расположены главные плоскости линзы толщиной  $d$ ?

2.13. Выведите соотношения, определяющие сопряженные точки оптической системы:

$$x_1 x_2 = f_1 f_2, \quad \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1, \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}.$$

2.14. Покажите, что фокусное расстояние оптической системы, состоящей из двух компонент, равно  $f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — передние фокусные расстояния компонент,  $\Delta$  — расстояние от заднего фокуса 1-й компоненты до переднего фокуса 2-й компоненты.

2.15. Покажите, что  $\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1$ , где  $a_1$  и  $a_2$  отсчитываются от главных плоскостей.

2.16. Запишите оптическую силу системы из двух тонких линз, находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга.

2.17. Какая система называется телескопической?

2.18. Как отличается длина зрительной трубы Кеплера от трубы Галилея, сконструированных из одинаковых собирающих линз, если фокусное расстояние второй линзы по абсолютной величине одинаково?

2.19. Нарисуйте оптическую схему микроскопа.

2.20. Нарисуйте оптическую схему зрительной трубы.

2.21. Зависит ли линейное увеличение зрительной трубы от положения предмета?

2.22. Чем определяется угловое увеличение зрительной трубы? Линейное увеличение микроскопа?

2.23. Можно ли в оптической системе получить и линейное и угловое увеличение?

2.24. Каково назначение фотографического объектива?

2.25. Сформулируйте условие, при котором можно получить неискаженное изображение протяженного предмета с помощью широкого пучка лучей.

2.26. Почему для объектива микроскопа наиболее существенным является выполнение условия синусов Аббе?

2.27. Каково физическое содержание условия синусов Аббе?

2.28. Какова физическая причина появления сферических аберраций? Можно ли рассчитать идеальный объектив для двух сопряженных точек? Для плоскостей?

2.29. Каким образом устраняются хроматические аберрации в объективах? В окулярах?

2.30. Как измерить фокусное расстояние сложного объектива?





$$BF = h [\operatorname{tg}(r + dr) - \operatorname{tg} r] = h' [\operatorname{tg}(i + di) - \operatorname{tg} i],$$

$$h' = h \frac{\operatorname{tg}(r + dr) - \operatorname{tg} r}{\operatorname{tg}(i + di) - \operatorname{tg} i} = h \frac{d(\operatorname{tg} r)}{d(\operatorname{tg} i)} = h \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} \frac{dr}{di},$$

$$h' = h \frac{\cos^3 i}{n_B \left(1 - \frac{\sin^2 i}{n_B^2}\right)^{3/2}} = 0,25 \text{ м.}$$

*Примечание.* Изображение, полученное после преломления на плоской поверхности, не является гомоцентричным. Точка пересечения лучей лежит на каустике.

Поскольку в глаз попадают лучи с малым угловым раствором, изображение предмета получается отчетливым.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Стекланный тонкостенный шар наполнен водой ( $n = 4/3$ ). Наблюдатель смотрит вдоль диаметра на крупинку, перемещающуюся вдоль этого диаметра. Как изменяется положение изображения этой крупинки, если она от удаленного по отношению к наблюдателю конца диаметра перемещается к ближнему концу?  $2r = 10$  см (рис. 3, а).

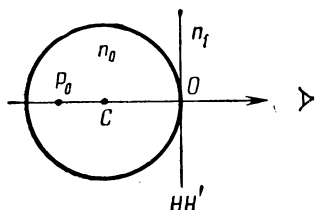


Рис. 3, а

Решение. Воспользуемся инвариантом Аббе для преломления на сферической поверхности параксиального пучка лучей:

$$\frac{n_0}{a_0} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_0 - n_1}{r},$$

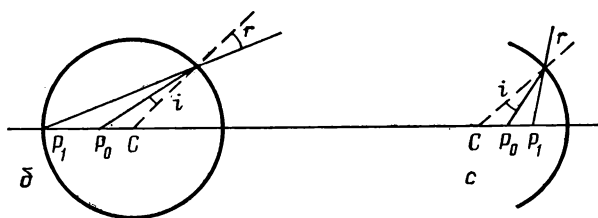


Рис. 3, б, с

$n_0, a_0$  относятся к пространству предметов;  $n_1, a_1$  — к пространству изображений.

В соответствии с правилом знаков расстояния отсчитываются от главной плоскости (обе главные плоскости проходят через вершину преломляющей поверхности 0) и имеют знак «плюс», если отсчитываются вдоль луча; в нашем случае  $r < 0$ .

$$a_1 = \frac{a_0 r n_1}{n_0 r - (n_0 - n_1) a_0},$$

где  $a_0 < 0$ . Таким образом,  $a_1$  совпадает по знаку с  $a_0$ . Для

$$a_0 = 2r \quad a_1 \approx 3r = -15 \text{ см},$$

$$a_0 = \frac{3}{2}r \quad a_1 = 1,8r = -9 \text{ см},$$

$$a_0 = r \quad a_1 = r = -5 \text{ см}.$$

Изображение  $P_1$  перемещается к наблюдателю (рис. 3 б, с).

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Стекланный шар ( $n=1,5$ ) имеет радиус  $R=4$  см. Найти расстояние от центра шара до изображения предмета, который находится на расстоянии 6 см от поверхности шара. Определить линейное увеличение.

**Решение.** Воспользуемся формулой для оптической силы толстой линзы, ограниченной двумя сферическими поверхностями:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2,$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — оптические силы преломляющих поверхностей,  $n$  — показатель преломления среды между преломляющими поверхностями.

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{r}, \quad \Phi_2 = \frac{1-n}{-r} = \frac{n-1}{r} = \Phi_1,$$

$$\Phi = 2 \frac{n-1}{r} - \frac{2r}{n} \frac{(n-1)^2}{r^2} = \frac{2(n-1)}{rn}.$$

Фокусное расстояние линзы

$$|f| = \frac{1}{\Phi} = \frac{rn}{2(n-1)} = 1,5 r.$$

Переднее фокусное расстояние  $f = -1/\Phi$ . Заднее фокусное расстояние  $f' = 1/\Phi$ , поскольку среда по обе стороны линзы одинакова. Главные плоскости расположены на расстояниях

$$OH = \frac{d}{n} \frac{\Phi_2}{\Phi} = r, \quad O'H' = -\frac{d}{n} \frac{\Phi_1}{\Phi} = -r$$

от вершины преломляющих поверхностей  $O$  и  $O'$ , т. е. проходят через центр линзы  $C$ .

Зная расположение кардинальных плоскостей, легко решим задачу.

Можно воспользоваться формулой

$$\frac{f}{a_1} + \frac{f'}{a_2} = 1, \tag{1}$$

где  $a_1$  и  $a_2$  отсчитываются от главных плоскостей, или формулой Ньютона

$$x_1 x_2 = ff', \quad (2)$$

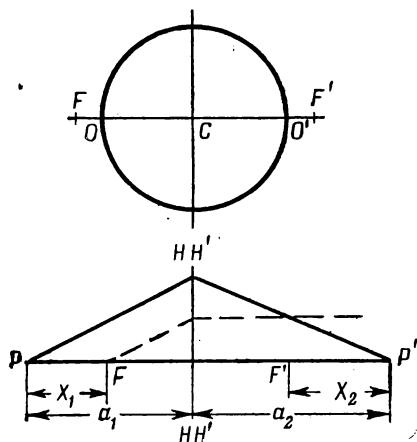


Рис. 4

где  $x_1$  и  $x_2$  отсчитываются от фокальных плоскостей. В нашей задаче  $a_1 = -10$  см,  $x_1 = -4$  см (рис. 4). Подстановка данных в (1) и (2) дает  $a_2 = 15$  см,  $x_2 = 9$  см. Поперечное увеличение  $V = a_2/a_1 = 1,5$ .

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1. Определить положение главных, фокальных плоскостей и фокусные расстояния системы двух тонких линз с фокусными расстояниями  $f_1 = 5$  см,  $f_2 = -5$  см, расположенных на расстоянии  $d = 10$  см друг от друга.**

**Решение.** 1. Воспользуемся соотношением, связывающим фокусные расстояния системы с фокусными расстояниями компонентов (система находится в воздухе ( $n=1$ )):

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad x_H = f_1 \frac{\Delta + f'_1 - f_2}{\Delta},$$

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}, \quad x_{H'} = f'_2 \frac{(\Delta + f'_1 - f_2)}{\Delta},$$

где  $\Delta$  — расстояние, отсчитываемое от задней фокальной плоскости первой линзы до передней фокальной плоскости второй линзы, а  $x_H$  и  $x_{H'}$  — от главных плоскостей. У нас первая линза собирающая, вторая — рассеивающая.

$\Delta = +10$  см. Расположение кардинальных плоскостей линз видно из рис. 5. Расстояние  $x_H$  отсчитывается от передней главной плоскости первой линзы и задней главной плоскости второй линзы.

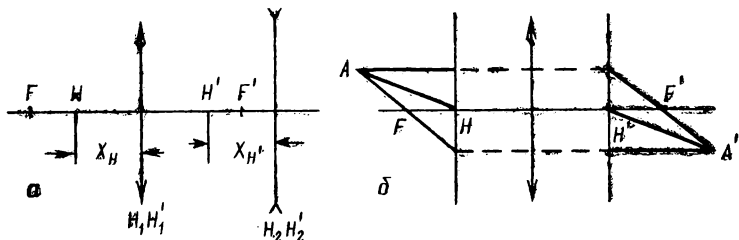


Рис. 5

Подстановка данных задачи дает  $f = -2,5$  см,  $f' = +2,5$ ,  $x_H = -5$ ,  $x_{H'} = -5$  см, т. е. система собирающая. На рис. 5, б дан пример построения изображения для этой системы линз.

2. Воспользуемся формулой для оптической силы системы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2,$$

где  $d$  — расстояние между главными плоскостями линз:

$$\Phi = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - d \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{10}{(-5) \cdot 5} = \frac{10}{25} \text{ см}^{-1},$$

$$f = -\frac{1}{\Phi} = -2,5 \text{ см}, \quad f' = \frac{1}{\Phi} = 2,5 \text{ см},$$

$$x_H = d \frac{\Phi_2}{\Phi} = 10 \frac{\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 25}{10} = -5 \text{ см},$$

$$x_{H'} = -d \frac{\Phi_1}{\Phi} = -10 \frac{\frac{1}{5} \cdot 25}{10} = -5 \text{ см}.$$

Если  $\Delta = 0$ , то  $|f| = \infty$ ,  $|x_H| = \infty$  и система становится телескопической. (Для этого в рассмотренной задаче линзы надо сдвинуть вплотную.) Линейное увеличение телескопической системы не зависит от положения предмета и равно

$$V = f_2/f_1.$$

Угловое увеличение  $W = f_1/f_2$ ,  $VW = 1$ , т. е. для получения больших угловых увеличений объектив зрительной трубы должен быть длиннофокусным, окуляр — короткофокусным.

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Написать условие ахроматизации двух линз, сложенных вплотную.

Решение. Фокусное расстояние линзы зависит от длины волны из-за дисперсии вещества  $n(\lambda)$ :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Однако  $f(n-1) = \text{const}$ . Следовательно,

$$\frac{\delta f}{f} + \frac{\delta n}{n-1} = 0. \quad (1)$$

Величина  $\frac{\delta n}{n-1} = \Delta$  называется относительной дисперсией вещества линзы и (1) можно записать в виде

$$\frac{\delta f}{f} + \Delta = 0. \quad (2)$$



Для системы линз, сложенных вплотную, фокусное расстояние системы  $f$  равно

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$\frac{\delta f}{f^2} = \frac{\delta f_1}{f_1^2} + \frac{\delta f_2}{f_2^2}. \quad (3)$$

Система линз ахроматизирована, если фокусное расстояние не зависит от длины волны ( $\delta f = 0$ ). Условие ахроматизации запишется в виде

$$\frac{\Delta_1}{f_1} + \frac{\Delta_2}{f_2} = 0. \quad (4)$$

Из (2) и (4) получаем условия для определения фокусных расстояний линз:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_2 - \Delta_1} \right) \text{ и } \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \right). \quad (5)$$

Из (4) видно, что  $f_1$  и  $f_2$  всегда противоположны по знаку, т. е. одна из линз собирающая, другая — рассеивающая. Для исправления хроматической аберрации объектива одну из линз делают из флинта ( $\Delta_1 \approx 1/30$ ), а другую — из крона ( $\Delta_2 \approx 1/60$ ). Если вся система собирающая ( $f > 0$ ), то собирающей должна быть линза с меньшим фокусным расстоянием ( $f_1 > 0$ ,  $f_1 < f_2$ ), изготовленная из крона так, чтобы  $(\Delta_2 - \Delta_1) > 0$ .

**3.5.2.** Рассчитать ахроматический плосковыпуклый склеенный объектив с фокусным расстоянием  $f = 1$  м, изготовленный из крона ( $n_1 = 1,5179$  и коэффициент дисперсии  $\nu_1 = 1/\Delta_1 = 60,2$ ) и флинта ( $n_2 = 1,6202$ ;  $\nu_2 = 36,2$ ). Линзы тонкие, одна из линз двояковыпуклая.

**Решение.** Система должна быть собирающей ( $f > 0$ ). Следовательно, двояковыпуклая линза должна быть изготовлена из крона и иметь меньшее фокусное расстояние. Пусть  $f_1 < f_2$ . Воспользуемся условием ахроматизации (4), полученным в 3.5.1, и формулами (5) для определения  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f_1 = f \frac{\Delta_2}{\Delta_2 - \Delta_1} = f \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = \frac{60,2 - 36,2}{60,2} \cdot 100 = 38,6 \text{ см.}$$

Соответственно

$$f_2 = -f \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = -66,4 \text{ см.}$$

Но

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_2} &= (n_1 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \\ \frac{1}{f_2} &= (n_2 - 1) \frac{1}{r_2}, \end{aligned} \right\} \frac{1}{r_1} = \frac{1}{f_1 (n_1 - 1)} + \frac{1}{f_2 (n_2 - 1)},$$

откуда  $r_1 = +39$  см,  $r_2 = f_2(n_2 - 1) = -41,1$  см, т. е. первая линза ограничена поверхностями  $r_1$  и  $r_2$ , вторая —  $(-r_2)$  и  $r = \infty$ .

**3.5.3.** Показать, что две тонкие линзы, сделанные из одного материала, образуют ахроматизированную в отношении фокусного расстояния систему, если расстояние между ними  $l = (f_1 + f_2)/2$ .

Решение. Оптическая сила системы двух линз равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - l\Phi_1\Phi_2.$$

Если линзы находятся в воздухе, то

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}.$$

Но  $\Phi = (n-1)k$ , где  $k$  — константа, зависящая от геометрии. Тогда

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1)k_1 + (n_2 - 1)k_2 - l(n_1 - 1)(n_2 - 1)k_1 k_2.$$

Так как  $n_1 = n_2$ , оптическая сила системы равна

$$\frac{1}{f} = (n - 1)(k_1 + k_2) - l(n - 1)^2 k_1 k_2.$$

Условие ахроматизации  $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$  приводит к соотношению

$$(k_1 + k_2) \frac{\partial n}{\partial \lambda} - l k_1 k_2 \cdot 2(n - 1) \frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0,$$

или

$$k_1 + k_2 = 2l(n - 1)k_1 k_2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2},$$

т. е.  $l = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ .

В отличие от системы двух линз, сложенных вплотную, ахроматизация фокусных расстояний не означает ахроматизацию положения фокальных плоскостей. Такой способ ахроматизации используется для окуляров, где предмет обычно располагается вблизи главного фокуса.

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** В каких случаях фокусное расстояние толстой линзы не зависит от ее толщины и точно совпадает с фокусным расстоянием

ем тонкой линзы, обладающей равной кривизной поверхности? Будет ли в этом случае положение фокуса относительно линзы зависеть от ее толщины?

4.2. Может ли двояковыпуклая линза с показателем преломления  $n > 1$  действовать как зрительная труба? Какова должна быть при этом толщина линзы  $d$ , если радиусы кривизны передней и задней поверхностей  $R_1$  и  $R_2$  соответственно?

4.3. Линза с показателем преломления 1,53 опущена в сероуглерод ( $n = 1,63$ ). Как изменится фокусное расстояние линзы по сравнению с фокусным расстоянием ее в воздухе?

4.4. В каком случае двояковыпуклая линза, изготовленная из стекла с показателем преломления  $n = 1,53$  и находящаяся в воздухе, будет рассеивающей?

4.5. В чем смысл ахроматизации окуляров в отношении только фокусных расстояний без одновременной ахроматизации в смысле совмещения главных плоскостей?

4.6. Какая линза в ахроматическом объективе телескопа, бинокля и т. п., состоящем из двояковыпуклой и плоско-вогнутой линз, делается из крона и какая из флинта?

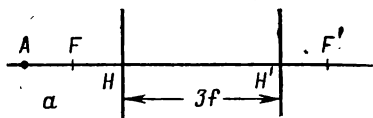
4.7. Как будет вести себя параллельный пучок света, входящий в сферическую линзу с показателем преломления  $n = 2$  вдоль оптической оси?

4.8. Где расположены главные плоскости сферической преломляющей поверхности?

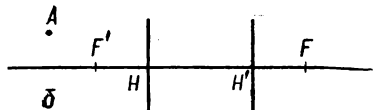
4.9. Нарисуйте расположение главных и фокальных плоскостей у объектива микроскопа.

4.10. Где расположены главные и фокальные плоскости зрительной трубы?

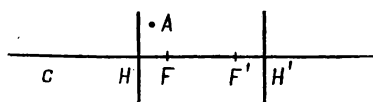
4.11. Постройте изображение точечного объекта  $A$ , находящегося на оптической оси в следующей системе (рис. 6, а).



4.12. Постройте изображение точечного объекта  $A$  в системе, заданной кардинальными плоскостями (рис. 6, б).



4.13. Постройте изображение предмета  $A$  в системе, изображенной на рис. 6, в.



4.14. Найдите (построением) положение главных, фокальных плоскостей и узловых точек системы из двух собирающих линз с фокусными расстояниями  $f_1 = f_2 = f$ , расположенных на расстоянии  $4f$  друг от друга. Собирающей или рассеивающей будет эта система?

Рис. 6, а, б, в

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. В зрительной трубе расстояние между объективом и окуляром составляло 185 мм. В это пространство понадобилось установить сетку (плоскопараллельную пластинку) толщиной  $d=5$  мм из стекла с показателем преломления  $n=1,5163$ . Определить новое расстояние между объективом и окуляром, сохраняющее то же состояние юстировки системы, что и до введения сетки.

Ответ.  $L=186,7$  мм.

5.2. Показать, что наименьшее отклонение  $\delta$  параллельного пучка в призме происходит при симметричном ходе лучей в призме. Связать угол  $\delta$  с показателем преломления  $n$  вещества призмы и с преломляющим углом  $A$  призмы.

Ответ.

$$n = \frac{\sin(A + \delta)}{\sin A/2}.$$

5.3. С помощью тонкой собирающей стеклянной линзы с показателем преломления  $n=1,5$  получено действительное изображение предмета на расстоянии 10 см от линзы. После того как предмет и линзу поместили в воду, не меняя расстояния между ними, изображение получилось на расстоянии 60 см от линзы. Найти фокусное расстояние линзы в воздухе, если показатель преломления воды  $n_{\text{в}}=4/3$ .

Ответ.  $f=9$  см.

5.4. На систему линз, изображенных на рис. 7, падает параллельный пучок света. Найти положение точки схождения этого пучка после прохождения через систему, если  $f_1=+10$  см,  $f_2=-20$ ,  $f_3=+9$  см.

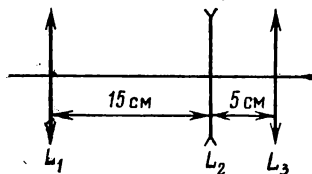


Рис. 7

Ответ.  $f_{\text{сист}}=\infty$ , система телескопическая.

5.5. С одной стороны двояковыпуклой тонкой линзы, сделанной из стекла ( $n=1,52$ ), находится вода ( $n=1,33$ ), с другой — воздух. Радиусы кривизны обеих поверхностей равны 20 см. Найти положение главных и фокальных плоскостей и узловых точек системы.

Ответ. Главные плоскости проходят через центр линзы,  $f=-28,5$  см,  $f'=38$  см. Узловые точки совпадают и находятся в воде на расстоянии 9,5 см от линзы.

5.6. Радиус кривизны  $r$  сферической поверхности стеклянной ( $n=1,52$ ) плоско-выпуклой линзы равен 26 см. Толщина линзы  $d=3,04$  см. Вычислить фокусное расстояние  $f$  линзы и найти положение изображения предмета, расположенного на расстоянии 75 см от выпуклой поверхности линзы.

Ответ.  $f=50$  см; в 148 см от плоской поверхности.

5.7. Написать условие, при котором одна линза будет ахроматизирована относительно фокусных расстояний для двух каких-либо участков спектра.

О т в е т. Оптическая сила толстой линзы толщиной  $d$  и радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$

$$\Phi = (n - 1) \left[ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{d}{n} \frac{n - 1}{R_1 R_2} \right]$$

квадратично зависит от показателя преломления  $n$ . Условие ахроматизации:

$$d = n^2 \frac{R_1 + R_2}{n^2 - 1}.$$

5.8. Найти толщину  $d$  и фокусное расстояние  $f$  толстой ахроматической двояковыпуклой линзы, обе поверхности которой имеют один и тот же радиус кривизны  $R = 10$  см. Линза изготовлена из стекла со следующими показателями преломления:  $n_{\text{красн}} = 1,636$ ;  $n_{\text{син}} = 1,682$ .

О т в е т.  $d = 31,42$  см;  $f = 20,2$  см.

5.9. Найти фокусные расстояния для красных, желтых и синих лучей, а также продольную хроматическую aberrацию (разность фокусных расстояний для крайних видимых лучей) двояковыпуклой тонкой линзы с радиусами кривизны  $R_1 = R_2 = 98,14$  см, сделанной из стекла со следующими показателями преломления:

Лучи	$\lambda$ (Å)	$n$
Красные . . . . .	6682	1,4835
Желтые . . . . .	5270	1,4907
Синие . . . . .	4046	1,4997

О т в е т.  $f_{\text{кр}} = 1015$  мм,  $f_{\text{ж}} = 1000$ ,  $f_{\text{син}} = 982$ ,  $\Delta f = 33$  мм.

5.10. Преломляющие поверхности линзы являются концентрическими сферическими поверхностями. Большой радиус кривизны  $R$ , толщина линзы  $d$ , показатель преломления  $n > 1$ . Определить положение главных плоскостей, фокусное расстояние линзы. Собирающей или рассеивающей будет линза?

О т в е т.  $f = -\frac{nR(R-d)}{d(n-1)}$ . Линза рассеивающая. Обе главные плоскости проходят через общий центр кривизны поверхностей.

5.11. Телескопическая система образована из двух стеклянных шаров, радиусы которых  $R_1 = 5,0$  см и  $R_2 = 1,0$  см. Каковы расстояния между центрами шаров и увеличение системы, если объективом является больший шар?

О т в е т.  $d = n(R_1 + R_2)/2(n - 1) = 9,0$  см,  $w = R_1/R_2 = 5$ .

5.12. Показать, что радиус кривизны  $\rho$  светового луча, распространяющегося в прозрачной изотропной среде с медленно меняющимся показателем преломления, определяется выражением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d(\ln n)}{dN},$$

где производная берется по направлению главной нормали к лучу. Получить это выражение, исходя из закона преломления света и пользуясь аналогией между классической механикой и геометрической оптикой.

## Раздел III

# ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

## 1. Теоретический материал

Граничные условия для электромагнитного поля. Законы отражения и преломления света на границе раздела двух сред. Формулы Френеля. Коэффициенты отражения и пропускания света. Поляризация света при отражении и преломлении. Явление полного внутреннего отражения.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

\* 2.1. Написать уравнение плоской монохроматической волны, которая распространяется в направлении, определяемом волновым вектором  $\vec{k}$ .

2.2. Какова связь между абсолютными значениями векторов напряженности электрического и магнитного полей в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в среде с определенными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ ?

2.3. Что такое относительный и абсолютный показатель преломления среды? Каков физический смысл показателя преломления среды? Как связан показатель преломления с диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями?

2.4. Что такое «прозрачная» среда?

2.5. Написать граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей.

2.6. Написать выражение для вектора Умова—Пойнтинга. Каков физический смысл этого вектора?

2.7. Дать определение интенсивности света. Как интенсивность света связана с амплитудой плоской электромагнитной волны?

2.8. Написать формулы Френеля для амплитуд отраженного и преломленного света.

2.9. Что такое «естественный свет»?

2.10. Дать определение коэффициентов отражения и пропускания света.

2.11. Что имеют в виду, когда говорят об эллиптической, круговой и линейной (плоской) поляризациях света?

2.12. Каков характер поляризации отраженного света, если луч падает на границу раздела двух сред под углом Брюстера?

2.13. Как связан угол Брюстера с показателем преломления среды?

2.14. Каков физический механизм взаимодействия световой волны с веществом в случае падения света под углом Брюстера?

2.15. Дать определение степени поляризации отраженного и преломленного света.

2.16. Как устроена стопа Столетова? С какой целью ее можно применять в физических экспериментах?

2.17. Дать определение азимута колебаний. Указать пределы его изменения.

2.18. Дать определение критического угла в явлении полного внутреннего отражения. Каким образом можно реализовать это явление в физическом эксперименте?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1 (1-й тип). Задачи на нахождение амплитуд отраженного и преломленного света при известной амплитуде падающего света и на исследование зависимости указанных амплитуд от угла падения.

Метод решения. Используются граничные условия для составляющих напряженности электрического и магнитного полей и формулы Френеля.

3.2 (2-й тип). Задачи на расчет интенсивности отраженного и преломленного света и соответствующих характеристик оптических устройств (коэффициенты отражения и пропускания, степени поляризации отраженного и преломленного лучей).

Метод решения. Используются формулы Френеля и уравнения Максвелла, в ряде случаев необходим учет многократного отражения.

3.3 (3-й тип). Задачи на нахождение фазовых сдвигов между падающей и отраженной волнами при полном внутреннем отражении и на вычисление оптических характеристик устройств, основанных на использовании полного внутреннего отражения для изменения характера поляризации света.

Метод решения. Используются формулы Френеля и формулы для фазового сдвига между перпендикулярной плоскости падения и параллельной этой плоскости составляющими отраженной волны в случае полного внутреннего отражения.

В предлагаемых ниже задачах встречаются следующие обозначения:  $E_1$ ,  $E_1'$  и  $E_2$  — падающая, отраженная и преломленная волны. Составляющим вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , параллельным плоскости падения, приписывается знак  $\parallel$ , перпендикулярным — знак  $\perp$ ;  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\chi$  — углы падения, отражения и преломления.

## б) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** На границу раздела двух бесконечных диэлектриков с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  под углом  $\varphi$  к нормали падает свет в виде плоской монохроматической волны. Исходя из условия одновременного существования на границе раздела падающей, отраженной и преломленной волн, получить законы отражения и преломления света.

Решение. Вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в электромагнитной волне в каждый момент времени можно разложить на две составляющие, ориентированные параллельно и перпендикулярно плоскости падения, даже если падающий свет является естественным (рис. 8). Уравнение плоской монохроматической волны  $E_{1\parallel}$ , распространяющейся в направлении волнового вектора  $\vec{k}$ , имеет вид

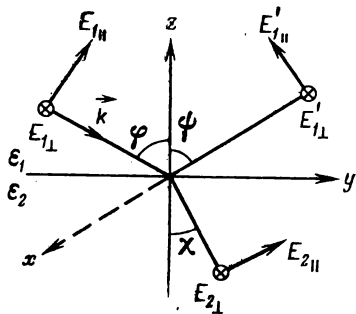


Рис. 8

$$E_{1\parallel} = A_{1\parallel} \sin [\omega t - (\vec{k} \vec{r})], \quad (1)$$

где  $A_{1\parallel}$  — амплитуда волны,  $\omega$  — циклическая частота,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения.

Так как в нашем случае волновой вектор  $\vec{k}$  лежит в плоскости падения, перпендикулярной оси  $OX$ , то  $k_x = 0$  и скалярное произведение

$$(\vec{k} \vec{r}) = k_y y + k_z z.$$

Учитывая, что

$$k_y = k \sin \varphi, \quad k_z = k \cos \varphi, \quad k = \frac{\omega}{v},$$

где  $v$  — скорость распространения электромагнитной волны, получаем

$$E_{1\parallel} = A_{1\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \varphi + z \cos \varphi}{v_1} \right) \right], \quad (2)$$

где  $v_1$  — скорость распространения света в первой среде.

Аналогично для отраженного и преломленного света имеем

$$E'_{1\parallel} = A'_{1\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \varphi + z \cos \varphi}{v_1} \right) \right];$$



$$E_{2\parallel} = A_{2\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \chi + z \cos \chi}{v_2} \right) \right],$$

где  $v_2$  — скорость распространения света во второй среде.

На границе раздела сред ( $z=0$ )

$$E_{1\parallel}|_{\text{гp}} = A_{1\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \varphi}{v_1} \right) \right],$$

$$E'_{1\parallel}|_{\text{гp}} = A_{1\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \psi}{v_1} \right) \right],$$

$$E_{2\parallel}|_{\text{гp}} = A_{2\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \chi}{v_2} \right) \right].$$

На этой границе вторичные волны  $E_1'$  и  $E_2$  должны изменяться так же, как и первичная волна  $E_1$ . Другими словами, фазы всех трех волн должны совпадать, т. е.

$$t - \frac{y \sin \varphi}{v_1} = t - \frac{y \sin \psi}{v_1} = t - \frac{y \sin \chi}{v_2}. \quad (3)$$

Из равенств (3) следует, что

$$\psi = \varphi, \quad (4)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}, \quad (5)$$

где  $n_{12}$  — относительный показатель преломления.

Вместе с утверждением, что отраженный и преломленный лучи лежат в плоскости падения, равенства (4) и (5) представляют собой законы отражения и преломления света.

**3.1.2.** В условиях предыдущей задачи найти связь между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля).

Решение. Граничные условия для нормальных  $n$  и тангенциальных  $t$  составляющих напряженностей электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей на границе двух сред имеют вид

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2}, & \epsilon_1 E_{n1} &= \epsilon_2 E_{n2}, \\ H_{t1} &= H_{t2}, & H_{n1} &= H_{n2} \end{aligned}$$

( $\mu=1$  для большинства рассматриваемых сред).

Предположим, что падающая волна поляризована в плоскости падения. В этом случае нормальная составляющая магнитного поля отсутствует и граничные условия запишутся в виде (рис. 8):

$$\begin{aligned} E_{1\parallel} \cos \varphi - E'_{1\parallel} \cos \psi &= E_{2\parallel} \cos \chi; \\ \epsilon_1 (E_{1\parallel} \sin \varphi + E'_{1\parallel} \sin \psi) &= \epsilon_2 E_{2\parallel} \sin \chi; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sqrt{\epsilon_1} (E_{1\parallel} + E'_{1\parallel}) = \sqrt{\epsilon_2} E_{2\parallel}.$$

(При записи последнего равенства была использована связь между абсолютными значениями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоской электромагнитной волне  $H = \sqrt{\epsilon} E$ .)

Формулы (1) не изменятся, если вместо мгновенных значений  $E_1$ ,  $E_1'$  и  $E_2$  подставить соответствующие амплитудные значения. Однако чтобы не вводить новых обозначений, мы везде в дальнейшем под  $E_1$ ,  $E_1'$  и  $E_2$  будем понимать амплитуды соответствующих волн. Имея в виду это обстоятельство, а также используя законы отражения и преломления света (формулы (4) и (5) задачи 3.1.1) и тригонометрические равенства

$$\sin \varphi \cos \varphi \pm \sin \chi \cos \chi = \sin(\varphi \pm \chi) \cos(\varphi \mp \chi),$$

из граничных условий (1) находим

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}, \quad (2)$$

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}. \quad (3)$$

Аналогично для перпендикулярных компонент рассматриваемых амплитуд можно получить

$$E'_{1\perp} = -E_{1\perp} \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad (4)$$

$$E_{2\perp} = E_{1\perp} \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi)}. \quad (5)$$

Формулы (2) — (5) называются формулами Френеля. Угол  $\chi$  в этих формулах определяется из закона преломления света, т. е.

$$\chi = \arcsin \left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \varphi \right).$$

**3.1.3.** Найти угол полной поляризации для света, отраженного от стекла с показателем преломления  $n = 1,52$ .

**Решение.** Знаменатели в формулах Френеля для амплитуд отраженного света конечны, за исключением случая, когда  $\varphi + \chi = \pi/2$ . В этом случае  $\operatorname{tg}(\varphi + \chi) = \infty$  и  $E'_{1\parallel} = 0$ , т. е. отраженный луч полностью поляризован.

Из закона преломления света  $\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = n$  имеем

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(\pi/2 - \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = n,$$

т. е.  $\varphi = \operatorname{arctg} 1,52 = 56^\circ 40'$ . Найденный угол является углом Брюстера.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** В условиях задачи 3.1.1 найти интенсивность отраженного и преломленного света, если падающий свет является естественным монохроматическим светом интенсивности  $I_1$ .

Решение. Поток электромагнитной энергии в направлении распространения волны, т. е. количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной направлению распространения, определяется вектором Умова—Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}].$$

Абсолютное значение вектора Умова—Пойнтинга

$$S = E \cdot H, \text{ так как } \vec{E} \perp \vec{H},$$

или, учитывая связь между абсолютными значениями напряженностей электрического и магнитного полей в плоской волне:

$$S = \sqrt{\epsilon} E^2. \quad (1)$$

Интенсивность света  $I$  равна усредненному по времени наблюдению количеству электромагнитной энергии, проходящей через единицу площади, перпендикулярной направлению распространения света, в единицу времени, т. е.

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\epsilon} \langle E^2 \rangle, \quad (2)$$

где знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени.

Если свет монохроматичный, то

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2, \quad (3)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний.

Подставляя (3) в (2), получаем

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon} A^2. \quad (4)$$

Учитывая, что вектор Умова—Пойнтинга направлен по волновому вектору  $\vec{k}$ , для интенсивности параллельной составляющей падающего света получим

$$I_{1\parallel} = \langle S_{1\parallel} \rangle \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1} E_{1\parallel}^2 \cos \varphi \quad (5)$$

(здесь под  $E_{1\parallel}$  понимаем амплитуду соответствующей компоненты падающей волны).

Интенсивность перпендикулярной компоненты падающей волны

$$I_{1\perp} = \langle S_{1\perp} \rangle \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1} E_{1\perp}^2 \cos \varphi. \quad (6)$$

Для отраженного света

$$I'_{1\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1} E'_{1\parallel}{}^2 \cos \varphi; \quad (7)$$

$$I'_{1\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1} E'_{1\perp}{}^2 \cos \varphi. \quad (8)$$

Так как по условию задачи падающий свет является естественным, это означает, что

$$I_{1\parallel} = I_{1\perp} = \frac{1}{2} I_1. \quad (9)$$

Выражая в (7) и (8) с помощью формул Френеля амплитуды отраженного света через амплитуды падающего и используя условие (9), для интенсивности отраженного света получим

$$I'_1 = I'_{1\parallel} + I'_{1\perp} = \frac{1}{2} I_1 \left[ \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \chi)} + \frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)} \right]. \quad (10)$$

Аналогично для интенсивности преломленного света можно найти

$$I_2 = I_{2\parallel} + I_{2\perp} = \frac{1}{2} I_1 \frac{\sin 2\varphi \sin 2\chi}{\sin^2(\varphi + \chi) \cos^2(\varphi - \chi)} [1 + \cos^2(\varphi - \chi)], \quad (11)$$

где

$$I_{2\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_2} E_{2\parallel}^2 \cos \chi; \quad I_{2\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_2} E_{2\perp}^2 \cos \chi.$$

**3.2.2.** Естественный свет падает под углом  $\varphi$  на плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления  $n$ . Найти степень поляризации вышедшего из пластинки света.

Решение. При падении луча света на плоскопараллельную пластинку происходит многократное отражение света от сторон пластинки, и на выходе из пластинки имеется в принципе бесконечная при бесконечной длине пластинки совокупность лучей убывающей интенсивности (рис. 9). Предположим, что степень монохроматичности падающего света невелика, так что правильная интерференция между отраженными и между прошедшими лучами отсутствует. Это означает, что суммарная интенсивность света на выходе из пластинки будет равна сумме интенсивностей вышедших лучей.

Введем в рассмотрение коэффициенты отражения для перпендикулярных и параллельных компонент падающего света:

$$r_{\parallel} = \frac{I'_{1\parallel}}{I_{1\parallel}}, \quad r_{\perp} = \frac{I'_{1\perp}}{I_{1\perp}}, \quad (1)$$

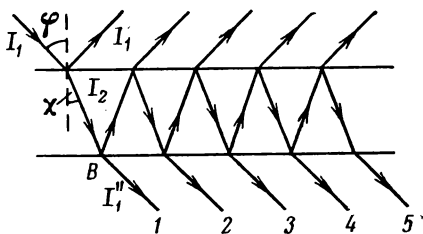


Рис. 9

где  $I_1$  и  $I_1'$  — интенсивности падающего и отраженного света соответственно. Из формулы (10) задачи 3.2.1 следует

$$r_{\parallel} = \left( \frac{n \cos \varphi - \cos \chi}{n \cos \varphi + \cos \chi} \right)^2, \quad r_{\perp} = \left( \frac{\cos \varphi - n \cos \chi}{\cos \varphi + n \cos \chi} \right)^2. \quad (2)$$

С другой стороны, из формул Френеля следует, что коэффициенты отражения для каждой из рассматриваемых компонент в точках  $A$  и  $B$  одинаковы (см. задачу 5.6).

Рассмотрим теперь прохождение параллельной компоненты падающего луча через плоскопараллельную пластинку. В точке  $A$  интенсивность рассматриваемой компоненты падающего луча распределится между отраженным и преломленным лучами следующим образом (см. задачу 5.5):

$$I_{1\parallel} = I'_{1\parallel} + I_{2\parallel}, \quad (3)$$

где  $I_{2\parallel}$  — интенсивность параллельной компоненты света в пластинке. Отсюда с учетом (1)

$$I_{2\parallel} = I_{1\parallel} (1 - r_{\parallel}). \quad (4)$$

Поскольку распределение интенсивностей, аналогичное (3), происходит и в точке  $B$ , то интенсивность вышедшего в этой точке из пластинки луча

$${}_1I''_{1\parallel} = I_{1\parallel} (1 - r_{\parallel})^2. \quad (5)$$

Луч, отраженный в точке  $B$  от нижней стороны пластинки, выйдет из нее, испытав двукратное отражение. Его интенсивность

$${}_2I''_{1\parallel} = I_{1\parallel} r_{\parallel}^2 (1 - r_{\parallel})^2. \quad (6)$$

Луч 3 выйдет из пластинки, испытав четырехкратное отражение, и его интенсивность

$${}_3I''_{1\parallel} = I_{1\parallel} r_{\parallel}^4 (1 - r_{\parallel})^2 \quad (7)$$

и т. д.

Интенсивность вышедшего из пластинки света согласно сказанному выше о сложении интенсивностей равна

$$I''_{1\parallel} = {}_1I''_{1\parallel} + {}_2I''_{1\parallel} + {}_3I''_{1\parallel} + \dots$$

С учетом (5) — (7)

$$I''_{1\parallel} = I_{1\parallel} (1 - r_{\parallel})^2 (1 + r_{\parallel}^2 + r_{\parallel}^4 + \dots).$$

Так как по смыслу коэффициентов отражения  $r_{\parallel} < 1$ , то геометрическая прогрессия в правой части написанного равенства сходится и мы имеем

$$I''_{1\parallel} = I_{1\parallel} \frac{(1 - r_{\parallel})^2}{1 - r_{\parallel}^2} = I_{1\parallel} \frac{1 - r_{\parallel}}{1 + r_{\parallel}}. \quad (8)$$

Аналогично для интенсивности перпендикулярной компоненты прошедшего из пластинки света можно найти

$$I''_{1\perp} = I_{1\perp} \frac{1 - r_{\perp}}{1 + r_{\perp}}. \quad (9)$$

Степень поляризации прошедшего света по определению выражается формулой

$$\Delta = \frac{(I''_{1\perp} - I''_{1\parallel})}{(I''_{1\perp} + I''_{1\parallel})}. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в (10) и учитывая, что для естественного света  $I_{1\parallel} = I_{1\perp}$ , получим

$$\Delta = \frac{(r_{\parallel} - r_{\perp})}{(1 - r_{\parallel} r_{\perp})}. \quad (11)$$

**3.2.3. Линейно поляризованный свет с амплитудой электрического вектора  $E_1$  падает нормально из среды с показателем преломления  $n_1$  на среду с показателем  $n_2$ . Среда разделена переходным слоем толщины  $l$ , в котором показатель преломления меняется непрерывно от значения  $n_1$  на верхней границе до значения  $n_2$  на нижней границе по закону**

$$n = C/(z + a),$$

где  $C$ ,  $a$  — постоянные (ось  $z$  направлена нормально к слою). Найти коэффициент отражения  $r$  и исследовать при этом предельные случаи тонкого и толстого переходных слоев.

**Решение.** Поместим начало координат на верхней границе слоя и введем обозначение  $\xi = z + a$ . Тогда можно написать

$$k_0 n = p/\xi, \quad (1)$$

где  $k_0$  — волновое число в пустоте,  $p$  — постоянная.

На верхней границе слоя  $\xi = a$ . Обозначим через  $b$  значение  $\xi$  на нижней границе. Очевидно,

$$l = b - a, \quad k_0 n_1 = p/a, \quad k_0 n_2 = p/b.$$

Отсюда

$$p = \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2} k_0 l = 2\pi \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2} \frac{l}{\lambda}, \quad (2)$$

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_2 \left(1 - \frac{z}{l}\right) + n_1 \frac{z}{l}}. \quad (3)$$

Если падающая волна линейно поляризована, то отраженная и преломленная волны, а также поле внутри слоя будут тоже поляризованы линейно и притом в той же плоскости. Пусть электри-

ческое поле  $\vec{E}$  параллельно оси  $OY$ , а магнитное  $\vec{H}$  параллельно оси  $OX$ . Поле внутри слоя описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  связан с вектором напряженности магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

а вектор электрической индукции  $\vec{D}$  с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  — соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}.$$

В свою очередь,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные.

В силу специфического выбора направлений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \vec{e}_x, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} \vec{e}_y,$$

где  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  — единичные векторы вдоль осей  $OX$  и  $OY$ . Здесь использовано, что  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ .

Предполагая далее, что падающий свет представляет собой монохроматическую плоскую электромагнитную волну, получим

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}; \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D} \quad (6)$$

(см. формулы (10), (11) задачи 3.1.1 разд. VIII).

С учетом (5), (6) система (4) запишется в виде

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -ik_0 c \mu_0 H, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = -ik_0 c \epsilon_0 E,$$

поскольку  $\omega = k_0 c$ , где  $c$  — скорость света в пустоте.

Исключая  $H$ , получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + k^2 n^2 E = 0. \quad (8)$$

При выводе (8) было использовано, что  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$  и  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Учитывая (1), запишем (8) в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{p^2}{\xi^2} E = 0. \quad (8')$$

Общее решение (8') будем искать в виде

$$E = \sqrt{\xi} (A \xi^q + B \xi^{-q}), \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Подставляя (9) в (8'), найдем, что  $q$  определяется уравнением

$$q^2 = \frac{1}{4} - p^2. \quad (10)$$

Из (9) и (7) получаем

$$H = \frac{i}{k_0 c \mu_0 \sqrt{\xi}} \left[ \left( q + \frac{1}{2} \right) A \xi^q - \left( q - \frac{1}{2} \right) B \xi^{-q} \right]. \quad (11)$$

Имея в виду амплитудные значения, запишем условие непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на верхней границе раздела двух сред ( $\xi = a$ ). Для электрического поля имеем

$$E = E_1 + E'_1, \quad (12)$$

где  $E'_1$  — амплитуда отраженной волны.

Для напряженности магнитного поля на этой же границе можно написать

$$H = H_1 - H'_1, \quad (13)$$

где  $H_1$ ,  $H'_1$  — амплитуды напряженности магнитного поля в падающей и отраженных волнах.

Знак «минус» в (13) обусловлен тем, что при отражении напряженность магнитного поля меняет фазу на  $\pi$  (см. формулы Френеля).

Поскольку в плоской электромагнитной волне существует следующая связь между абсолютными значениями напряженностей:

$$\sqrt{\mu} H = \sqrt{\epsilon} E, \quad (14)$$

то условие (13) можно записать в виде

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 (E_1 - E'_1). \quad (15)$$



В плоской монохроматической волне зависимость от пространственной переменной определяется множителем вида

$$e^{-ikz} = e^{-ik_0 n z}. \quad (16)$$

Если через  $E_2$  обозначить амплитуду напряженности электрического поля преломленной волны, то условие непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на нижней границе ( $z=l$ ) раздела сред запишется в виде

$$E = E_2 e^{-ik_0 n_2 l}. \quad (17)$$

Учитывая (14), для тангенциальных компонент магнитного поля получим

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_2 E_2 e^{-ik_0 n_2 l}. \quad (18)$$

Приравнявая (12), (15), (17) и (18) значениям  $E$  и  $H$  на границах слоя, вычисленным из (9) и (11), найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{a}(Aa^q + Ba^{-q}) &= E_1 + E'_1, \\ \frac{i\sqrt{a}}{p} \left[ \left( q + \frac{1}{2} \right) Aa^q - \left( q - \frac{1}{2} \right) Ba^{-q} \right] &= E_1 - E'_1, \\ \sqrt{b}(Ab^q + Bb^{-q}) &= E_2 e^{-ik_0 n_2 l}, \\ \frac{i\sqrt{b}}{p} \left[ \left( q + \frac{1}{2} \right) Ab^q - \left( q - \frac{1}{2} \right) Bb^{-q} \right] &= E_2 e^{-ik_0 n_2 l}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим, в частности

$$\frac{E'_1}{E_1} = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{q \operatorname{ch} \alpha - ip \operatorname{sh} \alpha}, \quad (19)$$

где

$$\alpha = q \ln \frac{n_2}{n_1}. \quad (20)$$

Представлять решение в этой форме удобно, если  $p^2 < 1/4$ , т. е. когда  $q$  вещественно. Если же  $p^2 > 1/4$ , то  $q^2 < 0$ . В этом случае  $q$  и  $\alpha$  чисто мнимые. Положим

$$\alpha = i\alpha', \quad q = iq',$$

где  $\alpha'$ ,  $q'$  вещественны. Тогда

$$\frac{E'_1}{E_1} = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{th} \alpha'}{q' \cos \alpha' - ip \sin \alpha'}. \quad (21)$$

Если  $l=0$  ( $l \ll \lambda$ ), то  $p=0$ ,  $q=1/2$  и формула (19) дает

$$\frac{E'_1}{E_1} = -\operatorname{th} \alpha = -\operatorname{th} \left( \ln \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \right) = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \quad (22)$$

Таким образом, если толщина переходного слоя мала по сравнению с длиной волны, то отражение практически происходит так же, как и в случае резкой границы.

Если же  $l \gg \lambda$ , то  $p^2 \gg 1$  и в формуле (10) членом  $1/4$  можно пренебречь, т. е. можно положить  $q' = p$ . Тогда из (21) получим для коэффициента отражения

$$r = \left| \frac{E'_1}{E_1} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left( p \ln \frac{n_2}{n_1} \right)}{4p^2}. \quad (23)$$

Видно, что коэффициент отражения  $r$  является осциллирующей затухающей функцией толщины слоя  $l$ . Амплитуда этих осцилляций

$$r_{\max} = \frac{1}{4p^2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{4\pi n_1 n_2} \right)^2 \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2 \quad (24)$$

убывает обратно пропорционально квадрату толщины переходного слоя. Таким образом, для слоев, толщина которых велика по сравнению с длиной волны, отражение практически отсутствует. Этот вывод не связан со специальным законом изменения показателя преломления (3), а относится к любым толстым переходным слоям с плавно меняющимся показателем преломления.

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1. Монохроматический свет в виде плоской волны распространяется из оптически более плотной среды в менее плотную так, что на границе раздела происходит полное внутреннее отражение. Определить характер световой волны в оптически менее плотной среде, если относительный показатель преломления  $n_{12}$ .**

**Решение.** Если полного внутреннего отражения не происходит, то световая волна во второй среде имеет вид (ограничимся рассмотрением составляющей)

$$E_{2\parallel} = A_{2\parallel} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \chi + z \cos \chi}{v_2} \right) \right], \quad (1)$$

где угол преломления  $\chi$  связан с углом падения  $\varphi$  законом преломления

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = n_{12}$$

(см. задачу 3.1.1).

Поскольку по условию задачи происходит полное внутреннее отражение, т. е.  $n_{12} < 1$ , а угол  $\varphi$  превышает критическое значение  $\varphi_k$ , определяемое условием  $\sin \varphi_k = n_{12}$ , то можно формально написать

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}}, \quad \cos \chi = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}, \quad (2)$$

где  $i$  — мнимая единица.

Уравнение (1) удобно записать с помощью мнимой экспоненты в виде

$$E_{2\parallel} = A_{2\parallel} \operatorname{Im} e^{i \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \chi + z \cos \chi}{v_2} \right) \right]}. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получим

$$E_{2\parallel} = A_{2\parallel} e^{\mp \frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}} \operatorname{Im} e^{i \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \varphi}{n_{12} v_2} \right) \right]},$$

или

$$E_{2\parallel} = A_{2\parallel} e^{\mp \frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \varphi}{n_{12} v_2} \right) \right]. \quad (4)$$

Физический смысл имеет знак «плюс» в формуле (2), так как в противном случае при увеличении расстояния  $z$  амплитуда в (4) будет неограниченно возрастать. Окончательно получим

$$E_{2\parallel} = A_{2\parallel} e^{-\frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y \sin \varphi}{n_{12} v_2} \right) \right]. \quad (5)$$

Формула (5) описывает неоднородную волну, распространяющуюся вдоль поверхности раздела сред в плоскости падения (т. е. в направлении  $y$ ). При этом амплитуда световой волны быстро уменьшается с глубиной проникновения  $z$ . Эффективная глубина проникновения есть величина порядка  $\frac{v_2}{\omega} = \frac{\lambda_2}{2\pi}$ , т. е. порядка длины волны.

**3.3.2.** Показать, что в случае полного внутреннего отражения интенсивность отраженного света равна интенсивности падающего света.

Решение. Чтобы применить формулы Френеля

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}; \quad E'_{1\perp} = -E_{1\perp} \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}$$

к случаю полного внутреннего отражения, перепишем их в виде

$$\begin{aligned} E'_{1\parallel} &= E_{1\parallel} \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin \chi \cos \chi}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \chi \cos \chi}, \\ E'_{1\perp} &= -E_{1\perp} \frac{\sin \varphi \cos \chi - \sin \chi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \chi + \sin \chi \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Подставив в (1) значения величин из формул (2) задачи 3.3.1 и помня, что перед квадратным корнем необходимо брать знак «плюс», получим

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel} \frac{n_{12}^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}};$$

$$E'_{1\perp} = E_{1\perp} \frac{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}. \quad (2)$$

Видно, что в случае полного внутреннего отражения амплитуды отраженных волн — комплексные величины. Из (2) следует, что модули соответствующих комплексных амплитуд связаны соотношениями

$$|E'_{1\parallel}| = |E_{1\parallel}|, \quad |E'_{1\perp}| = |E_{1\perp}|. \quad (3)$$

Известно, что интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды (см. формулу (4) задачи 3.2.1). Если амплитуда является комплексной величиной, то интенсивность пропорциональна квадрату модуля этой амплитуды, при этом из (3) следует, что в случае полного внутреннего отражения

$$I'_{1\parallel} = I_{1\parallel}, \quad I'_{1\perp} = I_{1\perp},$$

т. е.  $I'_1 = (I'_{1\parallel} + I'_{1\perp}) = (I_{1\parallel} + I_{1\perp}) = I_1$ .

**3.3.3. Найти фазовый сдвиг между отраженной и падающей волнами в случае полного внутреннего отражения.**

**Решение.** Из формул (2) задачи 3.3.2 видно, что отношения амплитуд  $E'_1/E_1$  имеют вид

$$\frac{E'_{1\parallel}}{E_{1\parallel}} = \frac{z_1}{z_1^*}, \quad \frac{E'_{1\perp}}{E_{1\perp}} = \frac{z_2}{z_2^*}, \quad (1)$$

где

$$z_1 = n_{12}^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}, \quad z_2 = \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}, \quad (2)$$

а знак \* означает комплексное сопряжение.

Известно, что любое комплексное число можно представить в виде

$$z = ae^{i\alpha},$$

где действительные числа  $a$  и  $\alpha$  являются модулем и аргументом комплексного числа соответственно. С учетом этого отношения (1) записываются в виде

$$\frac{E'_{1\parallel}}{E_{1\parallel}} = e^{i2\alpha_{\parallel}}, \quad \frac{E'_{1\perp}}{E_{1\perp}} = e^{i2\alpha_{\perp}}, \quad (3)$$

причем из (2) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_{\parallel} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\perp} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi}. \quad (4)$$

С другой стороны, из формул (3) задачи 3.3.2 следует, что в силу равенства модулей амплитуд соответствующих компонент падающей и отраженной волн сами эти амплитуды отличаются друг

от друга на фазовый множитель вида  $e^{i\delta}$  (напомним, что  $|e^{i\delta}| = 1$ ). Таким образом, можно написать

$$\frac{E'_{1\parallel}}{E_{1\parallel}} = e^{i\delta_{\parallel}}; \quad \frac{E'_{1\perp}}{E_{1\perp}} = e^{i\delta_{\perp}}, \quad (5)$$

где  $\delta_{\parallel}$  и  $\delta_{\perp}$  — фазовые сдвиги параллельной и перпендикулярной компонент отраженного света по отношению к соответствующим компонентам падающего света.

Сравнивая (5) и (3), запишем

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} = \operatorname{tg} \alpha_{\parallel}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = \operatorname{tg} \alpha_{\perp}.$$

Учитывая (4), окончательно находим

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi}. \quad (6)$$

Из (6) видно, что компоненты отраженного света при полном внутреннем отражении испытывают различные сдвиги фаз. Это означает, что линейно-поляризованный падающий свет при полном внутреннем отражении в общем случае превращается в эллиптически поляризованный.

**3.3.4.** Рассчитать преломляющий угол параллелепипеда Френеля, сделанного из стекла с показателем преломления  $n$ . По какому кругу будет поляризован вышедший свет: по правому или по левому?

**Решение.** Параллелепипед Френеля применяется, в частности, для превращения линейно-поляризованного света в свет, поляризованный по кругу, путем использования двукратного полного внутреннего отражения.

Известно, что круговая поляризация света получается при разности фаз  $\delta$  между перпендикулярной и параллельной компонентами вышедшего света, равной  $\pi/2$ ; амплитуды этих компонент должны быть одинаковы. Так как вышедший свет испытывает двукратное полное внутреннее отражение, то при каждом таком отражении разность фаз должна быть равна  $\pi/4$ . Подставляя значение  $\delta = \pi/4$  в формулу для разности фаз между перпендикулярной и параллельной компонентами отраженного света (см. задачу 5.18) и учитывая, что в нашем случае  $n_{12} = 1/n$ , получаем уравнение для нахождения преломляющего угла  $\varphi$  параллелепипеда Френеля

$$\sin^4 \varphi - \frac{n^2 + 1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \varphi + \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0.$$

Решая это уравнение для  $n = 1,7$ , получим  $\varphi_1 = 60^\circ 32'$ ;  $\varphi_2 = 38^\circ 42'$ .

Разность фаз в  $\pi/2$  между параллельной и перпендикулярной компонентами вышедшего света возникает в результате двух после-

довательных полных внутренних отражений при любом из приведенных углов.

По определению при выполнении прочих условий свет поляризован по левому кругу, если фазовый сдвиг  $\delta = \pi/2$ . Если  $\delta = 3\pi/2$ , то свет будет поляризован по правому кругу. Так как найденные нами значения преломляющего угла параллелепипеда Френеля, выполненного из стекла с показателем преломления  $n = 1,7$ , соответствуют  $\delta = \pi/2$ , то вышедший свет будет поляризован по левому кругу. (В связи с этим см. задачу 5.22.)

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Изменится ли состояние поляризации отраженного света (исключая случай полного внутреннего отражения), если падающий свет линейно поляризован?

4.2. Начертить качественно график зависимости коэффициентов отражения  $r_{\parallel}$  и  $r_{\perp}$  в функции угла падения.

4.3. Какой угол составляют отраженный и преломленный лучи, если свет падает под углом Брюстера?

4.4. Каким образом можно использовать отражение света от границы двух сред для получения линейно-поляризованного света?

4.5. Какие методы экспериментального определения показателей преломления вам известны?

4.6. При каких условиях при сложении двух линейно-поляризованных лучей получается свет, поляризованный по правому (левому) кругу?

4.7. Имеется ли противоречие между утверждением о том, что в случае полного внутреннего отражения интенсивность отраженного света равна интенсивности падающего, и фактом наличия электромагнитного поля в оптически менее плотной среде?

4.8. Можно ли с помощью параллелепипеда Френеля превратить свет, поляризованный по кругу, в линейно-поляризованный свет?

#### 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Исходя непосредственно из граничных условий для электрического и магнитного полей на границе вакуума и диэлектрика с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  получить формулы Френеля для нормального падения света на границу раздела.

Ответ.

$$E'_{1\parallel} = \frac{n-1}{n+1} E_{1\parallel}, \quad E'_{1\perp} = -\frac{n-1}{n+1} E_{1\perp},$$

$$E_{2\parallel} = \frac{2}{n+1} E_{1\parallel}, \quad E_{2\perp} = \frac{2}{n+1} E_{1\perp},$$

где  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

5.2. При выводе формул Френеля предполагается, что магнитная проницаемость  $\mu$  среды равна единице. Как изменятся формулы Френеля, если не вводить этого предположения?

Ответ.

$$E'_{1\parallel} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \chi}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \chi} E_{1\parallel};$$

$$E'_{1\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \chi}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \chi} E_{1\perp};$$

$$E_{2\parallel} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \chi} E_{1\parallel};$$

$$E_{2\perp} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \chi} E_{1\perp}.$$

5.3. Будет ли существовать угол полной поляризации, если магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$  граничащих сред отличны от единицы?

Ответ. Всегда существует угол падения, при котором не отражается либо параллельная, либо перпендикулярная компонента падающей волны. Угол, при котором не отражается параллельная компонента электрического поля, определяется условием

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Перпендикулярная компонента не отражается при условии

$$\operatorname{tg} \varphi'_B = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}}.$$

Эти условия взаимноисключающие. Отсюда следует сформулированный выше вывод.

5.4. Угол между плоскостью колебания поляризованного света и плоскостью падения называется азимутом колебания. Найти азимут отраженной волны  $\beta$  и азимут преломленной волны  $\gamma$ , если азимут падающей волны  $\alpha$ , а угол падения  $\varphi$ .

Ответ.

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{\cos(\varphi - \chi)}{\cos(\varphi + \chi)} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \cos(\varphi - \chi) \operatorname{tg} \alpha.$$

5.5. Проверить с помощью формул Френеля, что энергия падающей волны равна сумме энергий преломленной и отраженной волн (свет монохроматический).

5.6. Свет падает из среды I на среду II под углом  $\varphi$  и преломляется под углом  $\chi$ . Доказать, что коэффициент отражения не изменится, если свет будет падать из среды II на среду I под углом  $\chi$ .

Указание. Результат следует из формул Френеля.

5.7. Найти коэффициенты отражения и пропускания света в случае нормального падения на границу раздела сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ .

Ответ.

$$r = \frac{I'_1}{I_1} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2; \quad t = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

5.8. Имеются две параллельные полупрозрачные плоскости. Коэффициенты отражения и пропускания первой из них равны  $r_1$  и  $t_1$ , а второй —  $r_2$  и  $t_2$ . Степень монохроматичности падающего света невелика, так что правильной интерференции не происходит, а имеет место сложение интенсивностей света. Найти коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$  для совокупности обеих плоскостей.

Ответ.

$$r = r_1 + \frac{r_2 t_1^2}{1 - r_1 r_2};$$

$$t = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2}.$$

5.9. Две среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_3$  разделены диэлектрической пленкой с показателем преломления  $n_2$ . Рассмотрев случай нормального падения света, выяснить, при каком показателе преломления пленки коэффициент отражения системы будет минимальным (относительно падающего света смотри задачу 5.8).

Ответ.  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ .

Покрытие поверхностей оптических деталей диэлектрической пленкой с указанным показателем преломления используется для уменьшения потерь света вследствие отражения от поверхностей деталей.

5.10. Имеется  $m$  параллельных полупрозрачных плоскостей. Коэффициент отражения каждой из них равен  $r$ . Найти коэффициенты отражения  $r_m$  и пропускания  $t_m$  всей системы плоскостей. (Монохроматичность падающего света слабая.)

Ответ.

$$r_m = \frac{mr}{1 + (m-1)r}; \quad t_m = \frac{1-r}{1 + (m-1)r}.$$



5.11. В условиях задачи 3.2.3 найти связь между амплитудами преломленной и падающей волн. Рассмотреть случай чисто мнимого  $q$ .

Ответ.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}}{q \operatorname{ch} \alpha - ip \operatorname{sh} \alpha} e^{ik_0 n_2 l},$$

где  $\alpha = q \ln \frac{n_2}{n_1}$ ; если  $q = iq'$  ( $q'$  — вещественно), то

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q' \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}}{q' \cos \alpha' - ip \sin \alpha'} e^{ik_0 n_2 l}.$$

5.12. В условиях задачи 3.2.3 при известной амплитуде  $E_1$  падающего света найти амплитуды отраженной  $E_1'$  и преломленной  $E_2$  волн, если толщина переходного слоя такова, что  $p^2 = 1/4$ .

Ответ.

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{\ln \frac{n_2}{n_1}}{2 - i \ln \frac{n_2}{n_1}}; \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}}{2 - i \ln \frac{n_2}{n_1}} e^{ik_0 n_2 l}.$$

5.13. Показать, что коэффициент отражения среды, для которой  $\varepsilon = \mu$ , равен нулю.

5.14. Найти степень поляризации преломленного света

$$\Delta = \frac{I_{2\perp} - I_{2\parallel}}{I_{2\perp} + I_{2\parallel}}.$$

при падении света под углом полной поляризации на стекло с показателем преломления  $n = 1,5$ .

Ответ.

$$\Delta = \frac{4n^2 - (1 + n^2)^2}{4n^2 + (1 + n^2)^2} = -0,08.$$

5.15. Под каким углом нужно отразить луч от кристалла каменной соли ( $n = 1,544$ ), чтобы получить максимальную поляризацию отраженного луча? Падающий свет естественный.

Ответ.  $\varphi = \operatorname{arctg} n = 57^\circ 04'$ .

5.16. Найти степень поляризации света, отраженного от поверхности стекла под углами  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $56^\circ 51'$  и  $90^\circ$  (показатель преломления стекла  $n = 1,53$ ). Падающий свет естественный.

Ответ.  $\Delta' = 0; 0,82; 1; 0$ .

5.17. Найти степень поляризации преломленного луча на выходе его из стеклянной пластинки с показателем преломления  $n =$

$=1,5$  при углах падения  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $80^\circ$ . Падающий свет естественный.

Ответ.  $\Delta = -0,015$ ;  $-0,091$ ;  $-0,176$ ;  $-0,402$ .

5.18. Естественный свет падает под углом  $\varphi$  на стопу Столетова, состоящую из  $N$  стеклянных пластинок с показателем преломления  $n$ . Найти степень поляризации  $\Delta$  и  $\Delta'$  преломленного и отраженного света соответственно.

Указание. Воспользовавшись тем, что коэффициенты отражения  $r < 1$ , выражения вида  $(1+r)^{2N+1}$  разложить по формуле бинома Ньютона и ограничиться двумя первыми членами разложения.

Ответ.

$$\Delta = \frac{N(r_{\perp} - r_{\parallel})}{(2N-1)r_{\perp}r_{\parallel} - (N-1)(r_{\perp} + r_{\parallel}) - 1}$$

$$\Delta' = \frac{r_{\perp} - r_{\parallel}}{(2N-1)r_{\perp}r_{\parallel} + (r_{\perp} + r_{\parallel})},$$

где  $r_{\perp}$  и  $r_{\parallel}$  — коэффициенты отражения волн, поляризованных перпендикулярно и параллельно плоскости падения соответственно для одной отражающей поверхности (см. задачу 3.2.2).

5.19. Стопа Столетова состоит из десяти тонких плоскопараллельных пластинок, на которые луч падает под углом полной поляризации. Вычислить степень поляризации преломленного луча в зависимости от числа  $N$  проходимых им пластинок ( $n=1,5$ ). Падающий свет естественный.

Ответ.

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\Delta = \frac{N}{N+5,76}$	0,148	0,258	0,342	0,409	0,466	0,512	0,548	0,582	0,611	0,635

5.20. Найти фазовый сдвиг между перпендикулярной и параллельной компонентами отраженного луча при полном внутреннем отражении.

Ответ.

$$\operatorname{tg} \delta/2 = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\sin^2 \varphi},$$

где  $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ . В свою очередь,  $\delta_{\perp}$  и  $\delta_{\parallel}$  — фазовые сдвиги перпендикулярной и параллельной компонент отраженного луча по отношению к соответствующим компонентам падающего света (см. задачу 3.3.3.).

5.21. При каком угле падения  $\varphi$  разность фаз между перпендикулярной и параллельной компонентами отраженной волны достигает максимума при полном внутреннем отражении, если пада-

ющая волна линейно поляризована? Чему равен этот максимум?

Ответ.

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{2n_{12}^2}{1+n_{12}^2}},$$
$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1-n_{12}^2}{2n_{12}}.$$

5.22. Каким показателем преломления  $n$  должно обладать вещество, чтобы при помощи однократного полного внутреннего отражения на границе его с воздухом можно было превращать линейно-поляризованный свет в свет, поляризованный по кругу? Азимут колебания падающего света равен  $45^\circ$ .

Ответ.

$$n \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2,41.$$

5.23. Падающий свет поляризован линейно с азимутом колебаний, равным  $+45^\circ$ . Можно ли путем однократного полного внутреннего отражения превратить его в свет, поляризованный по правому кругу?

Ответ. Нельзя.

5.24. Какой должен быть минимальный показатель преломления параллелепипеда Френеля, чтобы при азимуте колебаний падающего света в  $+45^\circ$  выходящий свет был поляризован по правому кругу?

Ответ.

$$n = \frac{1 + \sin \frac{3\pi}{8}}{\cos \frac{3\pi}{8}} = 5,028.$$

Так как веществ с показателем преломления, равным пяти, не существует, то в оптике осуществить этот случай нельзя. Его можно было бы осуществить с более длинными электромагнитными волнами.

5.25. Линейно-поляризованная электромагнитная волна с азимутом колебаний, равным  $135^\circ$ , отражается на границе вода—воздух. Диэлектрическая проницаемость воды  $\epsilon=81$ . Под каким углом должна падать эта волна, чтобы отраженная волна получилась поляризованной по кругу? Какая будет поляризация — правая или левая?

Ответ.  $6^\circ 29'$  или  $44^\circ 38'$ . Правая.

## Раздел IV

# КОГЕРЕНТНОСТЬ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

### 1. Теоретический материал

Когерентные источники света. Понятие о временной и пространственной когерентности. Методы получения когерентных источников света (метод «деления волнового фронта», метод «деления амплитуды»). Оптическая длина пути и разность хода интерферирующих лучей. Распределение интенсивности при интерференции двух монохроматических волн, исходящих из точечных когерентных источников. Условия максимума и минимума интерференционной картины. Общий закон интерференции для стационарных оптических полей. Корреляционная функция полей. Автокорреляционная функция поля. Коэффициент частичной когерентности. Видность интерференционной картины. Связь коэффициента частичной когерентности с видностью интерференционной картины. Влияние монохроматичности и пространственной протяженности источников света на видность интерференционной картины. Интерференция при отражении световой волны. Стоячие оптические волны. Опыты Вина. Локализованные интерференционные картины. Интерференция в тонких пленках. Интерференция на плоскопараллельной пластинке и узком клине. Полосы равного наклона и полосы равной толщины. Основные интерференционные схемы и интерферометры (интерферометры Юнга, Рэлея, Жамена, Майкельсона и т. д.). Применение интерферометров для измерения длин волн, показателей преломления и дисперсии показателей преломления. Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри — Перо, пластинка Люммера — Герке.

### 2. Вопросы по теоретическому материалу

- 2.1. Что такое когерентные источники света?
- 2.2. В чем заключается явление интерференции световых лучей?
- 2.3. Что такое оптическая длина пути?
- 2.4. Какому условию должна удовлетворять разность хода между интерферирующими лучами для наблюдения в заданной точке максимума (минимума) интенсивности?

- 2.5. Сформулируйте условие квазимонохроматичности источника света.
- 2.6. Дайте определение времени когерентности. Каким образом время когерентности связано с эффективным интервалом частот, испускаемых квазимонохроматическим источником?
- 2.7. Дайте определение продольной длины когерентности. Каков физический смысл этого понятия?
- 2.8. Что такое поперечная длина когерентности? С какой характеристикой реальных источников связано это понятие?
- 2.9. Дайте определение объема когерентности.
- 2.10. Сформулируйте общий закон интерференции для стационарных оптических полей.
- 2.11. Дайте определение корреляционной функции полей.
- 2.12. Каким образом можно вычислить корреляционную функцию полей для случая пространственной когерентности?
- 2.13. Что такое автокорреляционная функция поля?
- 2.14. Каким образом автокорреляционная функция поля связана с интенсивностью излучения?
- 2.15. Дайте определение коэффициента частичной когерентности. Каким образом коэффициент частичной когерентности связан с видностью интерференционной картины?
- 2.16. Каким образом можно экспериментально реализовать стоячие оптические волны? В чем заключается опыт Винера?
- 2.17. Что такое локализованная интерференционная картина? Приведите примеры локализованных интерференционных картин. Локализована ли интерференционная картина в установке с зеркалами Френеля?
- 2.18. Напишите формулу для разности хода между интерферирующими лучами в случае интерференции на плоскопараллельной пластинке (на узком клине).
- 2.19. Укажите, какие лучи интерферируют между собой в случае интерференции на плоскопараллельной пластинке и при образовании колец Ньютона.
- 2.20. Что такое полосы равной толщины и полосы равного наклона?
- 2.21. Почему при интерференции в белом свете наблюдается так называемая «ахроматическая» полоса?
- 2.22. Нарисуйте принципиальные схемы интерферометров Юнга, Рэлея, Жамена, Майкельсона с обязательным указанием интерферирующих лучей.
- 2.23. С какой целью в одно из плеч интерферометра Майкельсона ставится так называемая компенсирующая пластинка?
- 2.24. Как должны располагаться друг относительно друга зеркала в интерферометре Майкельсона при наблюдении полос равной толщины (колец равного наклона)?
- 2.25. Каким образом устроены интерферометр Фабри—Перо, пластинка Льюмера—Герке?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

**3.1 (1-й тип).** Задачи на вычисление характеристик интерференционной картины (распределение интенсивностей, ширина и число интерференционных полос) в случае сложения двух монохроматических волн, излучаемых точечными когерентными источниками.

**Метод решения.** Используются формула (6) задачи 3.1.1 для интенсивности результирующего колебания, формула (1) задачи 3.1.2 для разности хода интерферирующих лучей и условие максимума (минимума) интерференционной картины.

**3.2 (2-й тип).** Задачи на расчет временной и пространственной когерентности реальных источников света, корреляционных функций и видности интерференционной картины.

**Метод решения.** Используются формулы для продольной и поперечной длин когерентности и для времени когерентности, полученные в задачах 3.2.1 — 3.2.3, и формулы (4), (7) задачи 3.2.6 для корреляционных функций и коэффициента частичной когерентности.

**3.3 (3-й тип).** Задачи на вычисление характеристик стоячих оптических волн (положение узлов и пучностей стоячих волн, распределение интенсивностей).

**Метод решения.** Используются формулы Френеля для амплитуд отраженных волн в случае отражения от идеально отражающих поверхностей.

**3.4 (4-й тип).** Задачи на расчет локализованных интерференционных картин.

**Метод решения.** Используются формулы для разности хода между интерферирующими лучами в случаях интерференции на плоскопараллельной пластинке и узком клине.

**3.5 (5-й тип).** Задачи на вычисление интенсивности света в многолучевых интерферометрах.

**Метод решения.** Основан на учете многократного отражения света в плоскопараллельной пластинке.

**3.6 (6-й тип).** Задачи на вычисление длин волн и показателей преломления с использованием характеристик интерференционных картин.

**Метод решения.** Используются формулы для разности хода интерферирующих лучей в интерференционных установках Юнга, Френеля и других и в случае интерференции на плоскопараллельной пластинке (узком клине), а также соответствующие условия максимума (минимума) интерференционной картины.

## 6) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Две плоские монохроматические волны, обладающие постоянной разностью фаз, распространяются в направлении, определяемом волновым вектором  $\vec{k}$ . Найти интенсивность результирующего колебания как функцию разности фаз  $\delta$  рассматриваемых волн.

**Решение.** Известно, что интенсивность  $I$  определяется как усредненное по времени наблюдения количество энергии, пересекающее единицу площади, перпендикулярной к направлению потока энергии, в единицу времени. Для плоской электромагнитной волны

$$I = V \bar{\epsilon} \langle E^2 \rangle \quad (1)$$

(см., например, формулу (2) задачи 3.2.1 разд. III), где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная,  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля в электромагнитной волне, знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени. Формула (1) справедлива, по крайней мере приближенно, и для волн более общего вида.

Для воздушной среды  $\epsilon \sim 1$  и

$$I = \langle E^2 \rangle. \quad (2)$$

Рассмотрим в некоторой фиксированной точке  $P$  пространства суперпозицию двух монохроматических волн  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ . Результирующее поле в точке  $P$   $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  и, следовательно,

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2).$$

Таким образом, полная интенсивность в точке  $P$  (см. (2))

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad (3)$$

где  $I_1 = \langle E_1^2 \rangle$ ,  $I_2 = \langle E_2^2 \rangle$ , а  $I_{12} = 2\langle (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \rangle$  — интерференционный член.

Будем в дальнейшем предполагать, что  $(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \neq 0$ .

Уравнения рассматриваемых волн имеют вид

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos[\omega t + (\vec{k} \cdot \vec{r}_1)], \quad \vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos[\omega t + (\vec{k} \cdot \vec{r}_2)],$$

где  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$  — амплитуды колебаний,  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  — радиус-векторы, проведенные от источников волн до точки наблюдения  $P$ .

Направив ось  $OZ$  системы координат по направлению вектора  $\vec{k}$ , напомним

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega t + kz_1), \quad \vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos(\omega t + kz_1 + \delta), \quad (4)$$

где  $\delta = kd = \frac{2\pi}{\lambda} d$  — разность фаз. В свою очередь,  $\lambda$  — длина волны,  $d = z_2 - z_1$  — оптическая разность хода. (Если среды, в которых распространяются лучи, характеризуются показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , то в общем случае оптическая разность хода  $d = n_2 r_2 - n_1 r_1$ , где  $r_1, r_2$  — расстояния, проходимые лучами от источника до точки наблюдения.)

Предполагая для простоты, что колебания в обеих волнах поляризованы в одной плоскости, т. е.  $(\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2) = A_1 \cdot A_2$ , получим

$$\begin{aligned} (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) &= A_1 A_2 \cos(\omega t + kz_1) \cdot \cos(\omega t + kz_1 + \delta) = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} [\cos \delta + \cos(2\omega t + 2kz_1 + \delta)]. \end{aligned}$$

Следовательно, интерференционный член

$$I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = A_1 A_2 \cos \delta = 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (5)$$

так как

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle E_1^2 \rangle = \frac{A_1^2}{2}, \quad I_2 = \langle E_2^2 \rangle = \frac{A_2^2}{2}, \\ \langle \cos(2\omega t + 2kz_1 + \delta) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Искомая интенсивность имеет вид

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (6)$$

Из (6) следует

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \text{ при } |\delta| = 2m\pi$$

(т. е. при  $d = m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ));

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2} \text{ при } |\delta| = (2m + 1)\pi \quad (7)$$

(т. е. при  $d = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )). (8)

**3.1.2. Найти распределение интенсивностей на экране в интерференционном опыте Юнга (рис. 10).**

Решение. Для определения разности хода между лучами, идущими в точку  $P$  от источников  $S_1$  и  $S_2$ , запишем

$$S_1 P = \sqrt{a^2 + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2},$$

$$S_2 P = \sqrt{a^2 + \left(x + \frac{l}{2}\right)^2}.$$

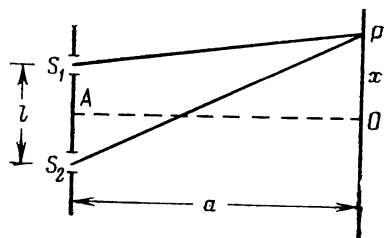


Рис. 10



Отсюда  $S_2P^2 - S_1P^2 = 2xl$ . Разность хода

$$d = S_2P - S_1P = \frac{S_2P^2 - S_1P^2}{S_1P + S_2P} = \frac{2xl}{S_1P + S_2P}.$$

Интерференционная картина в опыте Юнга наблюдается при условии  $l \ll a$ . Тогда  $S_1P + S_2P \simeq 2a$ . Таким образом,

$$d = \frac{xl}{a}. \quad (1)$$

Соответствующая разность фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xl}{a}. \quad (2)$$

Так как угол  $S_1PS_2$  очень мал, то можно считать, что волны от  $S_1$  и  $S_2$  движутся к точке  $P$  по одному и тому же направлению, и интенсивность рассчитывать по формуле (6) задачи 3.1.1, т. е.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \delta,$$

где  $\delta$  определяется формулой (2), а  $I_1 = I_2 = I_0$ . Учитывая это, окончательно получим

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi xl}{\lambda a}. \quad (3)$$

**3.1.3.** Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины  $\lambda$  составляют друг с другом малый угол  $\theta$ . Волны падают на экран, плоскость которого приблизительно перпендикулярна к направлению их распространения. Записав уравнения обеих волн и сложив их поля, показать, что расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними интерференционными полосами на экране определяется выражением

$$\Delta x = \lambda / \theta.$$

Решение. Интерферирующие волны запишем в виде

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_0 \cos [\omega t - (\vec{k}_1, \vec{r})], \quad \vec{E}_2 = \vec{A}_0 \cos [\omega t - (\vec{k}_2, \vec{r}) + \delta]$$

(см. задачу 3.1.1).

Отсюда

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{A}_0 \cos \left[ \left( \frac{\Delta \vec{k}}{2}, \vec{r} \right) - \frac{\delta}{2} \right] \cos \left[ \omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \frac{\delta}{2} \right],$$

где  $\Delta \vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ ;  $\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}$ .

Максимумы интенсивности получаются там, где выражение  $\cos \left[ \left( \frac{\Delta \vec{k}}{2}, \vec{r} \right) - \frac{\delta}{2} \right]$  максимально.

Так как  $k_1 = k_2$  и угол  $\theta$  между векторами  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  мал, то приближенно можно написать

$$|\Delta \vec{k}| \approx k\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \theta.$$

Для достаточно удаленных источников с большой степенью точности  $\left( \frac{\Delta \vec{k}}{2} \vec{r} \right) \approx \frac{\Delta k}{2} r$ . Условие, отвечающее максимуму  $m$ -го порядка, имеет вид

$$\frac{\Delta k}{2} r_m - \frac{\delta}{2} = m\pi.$$

Для максимума  $m+1$ -го порядка напишем

$$\frac{\Delta k}{2} r_{m+1} - \frac{\delta}{2} = (m+1)\pi.$$

Из написанных равенств следует

$$\Delta x = r_{m+1} - r_m = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda}{\theta}.$$

3.1.4. Найти ширину интерференционных полос в установке с зеркалами Френеля (рис. 11).

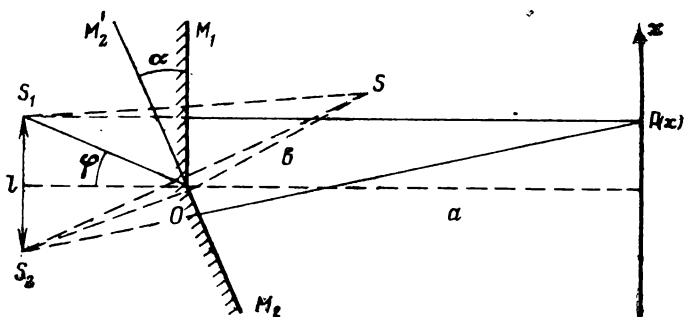


Рис. 11

Решение. Выразим расстояние между источниками  $S_1$  и  $S_2$  через  $SO = b$  и угол  $\alpha$  между зеркалами. Из  $\Delta S_1OS_2$  имеем

$$l = 2b \sin \varphi.$$

Из  $\Delta S_1OS$  следует

$$\angle S_1OM'_2 + \alpha = \angle M_1OS.$$

Из  $\Delta S_2OS$ :

$$\angle M_1OS + \alpha = 2\varphi + \angle S_1OM'_1.$$

Отсюда  $\varphi = \alpha$ , т. е.

$$l = 2b \sin \alpha. \quad (1)$$

Разность хода между интерферирующими лучами в точке  $P$

$$d = \frac{x l}{a + b \cos \alpha}$$

(см. формулу (1) задачи 3.1.2).

При малых  $\alpha$  имеем

$$d = \frac{2b x \alpha}{a + b}. \quad (2)$$

Минимум  $m$ -го порядка определяется условием (см. формулу (8) задачи 3.1.1)

$$(2m + 1) \frac{\lambda}{2} = \frac{2b x_m \alpha}{a + b}.$$

Отсюда

$$x_m = \frac{(2m + 1) (a + b) \lambda}{4b\alpha}.$$

Для минимума  $m+1$ -го порядка имеем

$$x_{m+1} = \frac{(2m + 3) (a + b) \lambda}{4b\alpha}.$$

Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{(a + b) \lambda}{2b\alpha}. \quad (3)$$

**3.1.5.** Найти число полос интерференции  $N$ , получающихся с помощью бипризмы, если показатель преломления ее  $n$ , преломляющий угол  $\alpha$ , длина волны источника  $\lambda$ . Расстояние бипризмы от экрана равно  $a$ , а расстояние источника света от бипризмы равно  $b$ .

**Решение.** Число полос интерференции, получающееся в данной установке, как видно из рис. 12, равно

$$N = \frac{2L}{\Delta x}, \quad (1)$$

где  $L$  — полуширина интерференционного поля на экране,  $\Delta x$  — ширина полосы интерференции.

Из рис. 12 следует, что

$$L = a \operatorname{tg} \epsilon,$$

где  $\epsilon$  — преломляющий угол призмы.

При малых углах преломления, которые являются малыми при малых  $\alpha$ ,

$$L = a\epsilon. \quad (2)$$

Выразим преломляющий угол призмы  $\varepsilon$  через  $\alpha$  и показатель преломления призмы  $n$ . Если под преломляющим углом понимать угол наименьшего отклонения, то, как известно, в этом случае

$$n = \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon + \alpha) \right]}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

При малых  $\alpha$   $n \approx \frac{\varepsilon + \alpha}{\alpha}$ , отсюда

$$\varepsilon = (n - 1) \alpha. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$L = a (n - 1) \alpha. \quad (4)$$

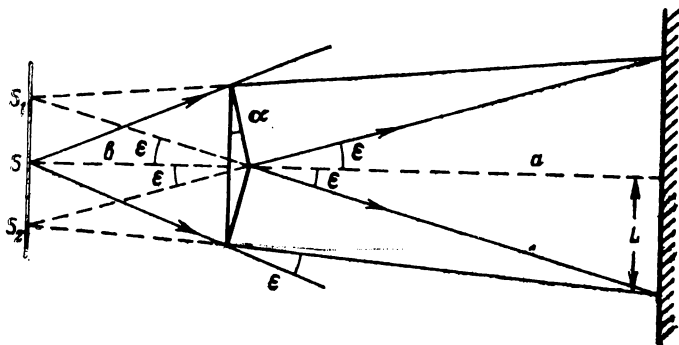


Рис. 12

Для вычисления ширины полос интерференции воспользуемся формулой (1) задачи 3.1.2. для разности хода. Для максимума  $m$ -го порядка имеем  $m\lambda = x_m l / (a + b)$ . Для максимума  $m+1$ -го порядка  $(m+1)\lambda = x_{m+1} l / (a + b)$ . Ширина полосы интерференции

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda (a + b)}{l}.$$

Так как  $l = 2b\varepsilon$  (рис. 12), то

$$\Delta x = \frac{\lambda (a + b)}{2b\varepsilon}.$$

Учитывая (3), находим

$$\Delta x = \frac{\lambda (a + b)}{2b\alpha (n - 1)}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (1), окончательно получим

$$N = \frac{4ab}{a+b} \frac{a^2(n-1)^2}{\lambda}. \quad (6)$$

3.1.6. Из линзы с фокусным расстоянием  $f=50$  см вырезана центральная часть шириной  $l$  (рис. 13). Обе половинки линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону от линзы помещен точечный источник монохроматического света с длиной волны  $\lambda=6000$  А. С противоположной стороны линзы помещен экран, на

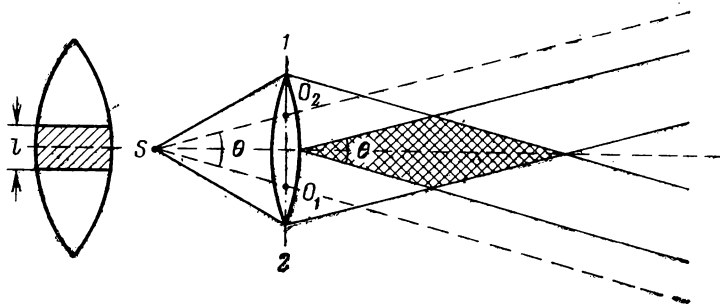


Рис. 13

котором наблюдаются полосы интерференции шириной  $\Delta x=0,5$  мм, причем ширина полос не меняется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найти  $l$ .

Решение. Так как по условию задачи ширина интерференционных полос не зависит от положения экрана, то это означает, что интерференционная картина образована параллельными пучками лучей, которые могут быть получены, если источник света помещен в фокус. Так как угол схождения пучков  $\theta$  мал, то можно применить результат задачи 3.1.3 для ширины полос интерференции  $\Delta x=\lambda/\theta$ . Из  $\Delta SO_1O_2$  следует  $\operatorname{tg} \theta/2=l/2f$ , или, учитывая малость  $\theta$ ,  $\theta=l/f$ . В результате получим, что  $\Delta x=f\lambda/l$ . Отсюда  $l=f\lambda/\Delta x=0,6$  мм.

## 2-й тип задач (3.2)

3.2.1. В некоторой точке  $P$  наблюдается световое возмущение  $u(t)$ , обусловленное сложением световых колебаний, испускаемых некогерентным источником света. Предполагая, что длительности «волновых пучков», испущенных различными излучателями данного источника, одинаковы и что  $u(t)$  имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t}, & \text{если } |t| \leq \frac{\Delta t}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| > \frac{\Delta t}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

получить оценочное выражение для времени когерентности данного источника.

Решение. Напомним, что  $e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t$  и что использованная запись для светового возмущения  $u(t)$  через комплексную экспоненту означает, что подразумевается, скажем, только действительная часть написанного комплексного числа.

В световое возмущение  $u(t)$  вносят вклад различные независимые излучатели, число которых чрезвычайно велико, причем каждый из них излучает свет со своей частотой  $\omega$ . Это можно выразить в виде

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

где  $u(\omega)$  — вклад в результирующее колебание излучения светового источника с частотой  $\omega$ .

С математической точки зрения формула (2) является разложением в интеграл Фурье функции  $u(t)$ . Совершая обратное преобразование Фурье, запишем

$$u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вычислить вклад различных монохроматических компонент в суммарное излучение. Подставляя (1) в (3), приходим к интегралу

$$u(\omega) = \frac{u_0}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt. \quad (4)$$

Вычисляя интеграл, получим

$$u(\omega) = \frac{u_0 \Delta t}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \Delta t}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \Delta t}{2}} \right\}. \quad (5)$$

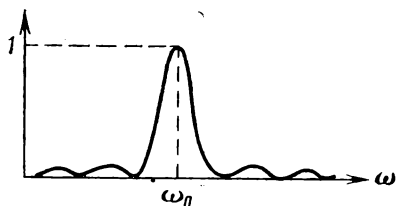


Рис. 14

График функции  $\sin \frac{(\omega - \omega_0) \Delta t}{2} / \frac{(\omega - \omega_0) \Delta t}{2}$  изображен на рис. 14.

Из графика видно, что максимальный вклад в световое возмущение  $u(t)$  вносит монохроматическая компонента с частотой  $\omega_0$  и что чем сильнее частота  $\omega$  какой-либо монохроматической компоненты отличается от частоты  $\omega_0$ , тем меньше вклад этой компоненты в результирующее световое возмущение  $u(t)$ . Таким образом, заметный вклад в результирующее возмущение вносит излучение таких монохроматических источников, частоты которых заключены в некотором эффективном интервале частот данного немонохро-

матического источника света. Ширина эффективного частотного интервала является неопределенной, однако так как первый нуль функции  $\sin \frac{(\omega - \omega_0) \Delta t}{2} / \frac{(\omega - \omega_0) \Delta t}{2}$  появляется при  $\omega - \omega_0 = \pm \frac{2\pi}{\Delta t}$ , то для оценки интересующего нас эффективного частотного интервала можно принять выражение  $\Delta\omega \cong \frac{2\pi}{\Delta t}$ , или, переходя к обычным частотам,

$$\Delta\nu \cong \frac{1}{\Delta t}. \quad (6)$$

Промежуток времени  $\Delta t$  есть не что иное, как длительность «волнового цуга», которая по условию задачи является одинаковой для всех источников. Ясно также, что интерференция в точке будет только в том случае, если время запаздывания  $\tau$  «волновых цугов», исходящих от источников, принадлежащих эффективному частотному интервалу, друг относительно друга будет удовлетворять условию

$$\tau < \Delta t. \quad (7)$$

Если промежуток времени  $\Delta t$  удовлетворяет условию (7), то он называется временем когерентности, а из формулы (6) следует искомое оценочное выражение для времени когерентности:

$$\Delta t \cong \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (8)$$

**3.2.2.** Квазимонохроматический источник света с длиной волны  $\lambda$  характеризуется разбросом длин волн  $\Delta\lambda$ . Какому соотношению должна удовлетворять разность хода между лучами для наблюдения интерференционной картины?

Решение. Времени когерентности  $\Delta t$ , которое при интерференции должно быть меньше времени запаздывания «волновых цугов» друг относительно друга, можно поставить в соответствие величину  $l_{\parallel}$ , называемую продольной длиной когерентности, соотношением

$$l_{\parallel} = c\Delta t, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света в рассматриваемой среде.

Из определения продольной длины когерентности ясно, что интерференционная картина будет наблюдаться в том случае, если разность хода  $d$  между лучами удовлетворяет условию

$$d < l_{\parallel}. \quad (2)$$

(Условие (2) является пространственным аналогом временного условия (7) задачи 3.2.1.) Выразим  $l_{\parallel}$  через данные задачи. Подставив в (1) выражение (8) задачи 3.2.1 для  $\Delta t$ , получим

$$l_{\parallel} \cong \frac{c}{\Delta\nu}. \quad (3)$$

Частотному интервалу  $\Delta\nu$  соответствует разброс длин волн  $\Delta\lambda$ . Для нахождения этого разброса продифференцируем выражение  $\nu = c/\lambda$ . В результате

$$d\nu = -\frac{cd\lambda}{\lambda^2}.$$

Переходя к конечным приращениям, получим

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим

$$l_{\parallel} \cong \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (5)$$

Условие (2) принимает вид

$$d < l_{\parallel} \cong \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad (6)$$

**3.2.3.** Квазимонохроматический источник света с длиной волны  $\lambda$  имеет поперечный размер  $l$ . Оценить поперечные размеры области в окрестности точки наблюдения  $P$ , находящейся на расстоянии  $a$  от источника, в пределах которой световое поле сохраняет когерентность.

Решение. Если источник является протяженным, то интерференционные картины, создаваемые за счет излучения с различных участков источника, оказываются сдвинутыми друг относительно друга. Обозначим сдвиг интерференционных картин, обусловленных излучениями с крайних концов протяженного источника длины  $l$ , через  $\delta$ . Ясно, что результирующая интерференционная картина будет достаточно четкой, если

$$\delta < \frac{\Delta x}{2}, \quad (1)$$

где  $\Delta x$  — ширина полос интерференции в случае интерференции волн, испущенных двумя когерентными точечными монохроматическими источниками, находящимися друг от друга на расстоянии  $l$ . Известно, что

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}, \quad (2)$$

где  $\theta$  — угол сходимости интерференционных лучей (см. задачу 3.1.3).

Выражая угол  $\theta$  через  $l$  и  $a$ , находим

$$\theta = \frac{l}{a}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\Delta x = \frac{\lambda a}{l}.$$



Таким образом, условие (1) имеет вид

$$\delta < \frac{\lambda a}{2l}. \quad (4)$$

Поперечные размеры области когерентности в окрестности точки  $P$  связаны с  $\delta$  соотношением

$$l_{\perp} = 2\delta, \quad (5)$$

где  $l_{\perp}$  — поперечная длина когерентности.

Учитывая (4), окончательно находим

$$l_{\perp} \cong \lambda a / l. \quad (6)$$

**3.2.4.** Определить продольную и поперечную длины, а также объем когерентности квантового оптического генератора, работающего на длине волны в  $5000\text{Å}$  с разбросом частот  $\Delta\nu = 10^2$  Гц. Диаметр зеркал генератора  $D = 5$  см.

**Решение.** Продольная длина когерентности

$$l_{\parallel} \cong \frac{c}{\Delta\nu} = 3 \cdot 10^8 \text{ см} \quad (1)$$

(см. формулу (3) задачи 3.2.2).

Расходимость пучка лучей, идущих от генератора, обусловлена дифракционными эффектами при отражении от зеркал. Оценка для минимального угла дифракции, который одновременно является углом расходимости пучка, имеет вид

$$\Delta\theta \cong \frac{\lambda}{D}. \quad (2)$$

Для вычисления поперечной длины когерентности в непосредственной близости от генератора воспользуемся формулой

$$l_{\perp} \cong \frac{\lambda}{\Delta\theta}, \quad (3)$$

которая следует из формул (1), (2) и (5) задачи 3.2.3. Подставляя (2) в (3), получим

$$l_{\perp} \cong D = 5 \text{ см}, \quad (4)$$

Поскольку нас интересует объем когерентности, необходимо также оценить поперечную длину когерентности  $l'_{\perp}$  на расстоянии, равном продольной длине когерентности  $l_{\parallel}$ . Используя формулу (6) задачи 3.2.3, получим

$$l'_{\perp} \cong \frac{\lambda l_{\parallel}}{D} = 3000 \text{ см}. \quad (5)$$

Так как  $l_{\perp} \ll l'_{\perp}$ , то можно считать, что интересующий нас объем когерентности имеет вид конуса, обращенного к генератору вершиной. Отсюда ясно, что объем когерентности

$$\Delta V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{l'_{\perp}}{2} \right)^2 l_{\parallel} \approx 7 \cdot 10^{14} \text{ см}^3. \quad (6)$$

**3.2.5. Установка с зеркалами Френеля освещается щелью, параллельной ребру зеркал, шириной  $L$  (плоскость щели перпендикулярна отрезку  $SM$  (рис. 15)). Вычислить видность полос интерференции.**

**Решение.** Если источник перенести из точки  $S$  в точку  $S'$ , находящуюся на расстоянии  $\xi$  от  $S$ , то изображения источника в зеркалах переместятся, соответственно в точки  $S'_1$  и  $S'_2$ .

При этом можно считать, что с точностью до членов 2-го порядка малости расстояние между изображениями  $S'_1$  и  $S'_2$  равно расстоянию  $S_1 S_2$ , которое обозначим через  $l$ .

Центральная полоса интерференционной картины переместится из точки  $O$  в точку  $O'$  (центральная полоса соответствует нулевой разности хода между интерферирующими лучами). Обозначив  $MO = a$ , из  $\triangle OMO'$  получим  $\frac{OO'}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi = \angle OMO'$ .

С указанной точностью из  $\triangle SMS'$  имеем  $\frac{\xi}{b} = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi = \angle SMS'$  и  $b = SM$ . Из написанных равенств следует

$$OO' = \frac{a}{b} \xi. \quad (1)$$

Обозначим через  $d$  оптическую разность хода для лучей в некоторой точке  $P$  на экране в случае, когда источник находится в точке  $S$ . Если же источник переместить в точку  $S'$ , то для той же точки наблюдения  $P$  разность хода

$$d' = d - \Delta d,$$

где

$$\Delta d = \frac{l}{a+b} OO' \quad (2)$$

(см. формулу (1) задачи 3.1.2).

Используя (1), запишем

$$d' = d - C\xi, \quad (3)$$

где

$$C = \frac{al}{(a+b)b}. \quad (4)$$

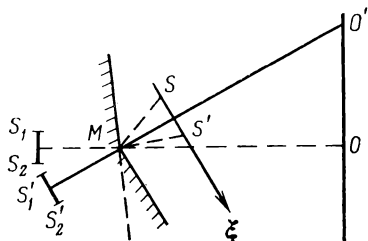


Рис. 15

Соответствующая разность фаз

$$\delta'(\xi, d) = \frac{2\pi}{\lambda} (d - C\xi). \quad (5)$$

Пусть источником служит щель шириной  $L$  с центром в точке  $S$  и пусть число точечных источников, образующих щель, так велико, что ее можно считать непрерывным источником. Разделим щель на элементарные полоски, перпендикулярные плоскости  $S_1S_2S$ . Пусть  $i_0 d\xi$  — интенсивность в точке  $P$  на экране света, посылаемого элементарной полоской шириной  $d\xi$  с помощью лишь одного зеркала. При наличии интерференции интенсивность света, обусловленная излучением полосы, находящейся на расстоянии  $\xi$  от  $S$ , согласно формуле (6) задачи 3.1.1

$$i(\xi, d) d\xi = 2i_0 (1 + \cos \delta') d\xi, \quad (6)$$

где  $\delta'$  определяется формулой (5).

Полная интенсивность

$$I(L, d) = 2i_0 \int_{-L/2}^{L/2} (1 + \cos \delta') d\xi = 2I_0 \left\{ 1 + \left( \frac{\sin \frac{\pi CL}{\lambda}}{\frac{\pi CL}{\lambda}} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \right) \right\},$$

где  $I_0 = i_0 L$ . Отсюда

$$I_{\max} = 2I_0 \left( 1 + \frac{\sin \frac{\pi CL}{\lambda}}{\frac{\pi CL}{\lambda}} \right); \quad (7)$$

$$I_{\min} = 2I_0 \left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi CL}{\lambda}}{\frac{\pi CL}{\lambda}} \right). \quad (7')$$

Согласно Майкельсону, видность интерференционной картины определяется следующим образом:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (7') в (8), окончательно получим

$$V = \frac{\left| \sin \frac{\pi CL}{\lambda} \right|}{\frac{\pi CL}{\lambda}}. \quad (9)$$

Проанализируем полученный результат. Если  $L = \lambda/4C$ , то  $V \simeq 0,9$ . Такая видность считается удовлетворительной. Таким образом, максимальная ширина щели, при которой видность интерфе-

ренционной картины еще остается удовлетворительной, определяется условием

$$L \leq \frac{\lambda}{4C}, \quad (10)$$

где  $C$  определяется формулой (4).

3.2.6. В интерференционной схеме Юнга (рис. 10) отверстия освещаются немонахроматическим источником. При этом интенсивность в точке  $P$  экрана при открытом только первом отверстии есть  $I_1(P)$ , при открытом только втором —  $I_2(P)$ . Предполагая, что излучение носит стационарный характер, получить формулу для распределения интенсивности на экране.

Решение. Считаем, что отверстия находятся в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Обозначим расстояния от произвольной точки экрана  $P$  до  $P_1$  и  $P_2$  через  $S_1$  и  $S_2$ . Точки  $P_1$  и  $P_2$  можно считать центрами вторичных возмущений, так что согласно принципу Гюйгенса возмущение  $u(P, t)$  в точке  $P$  экрана запишется в виде

$$u(P, t) = k_1 u(P_1, t - t_1) + k_2 u(P_2, t - t_2), \quad (1)$$

где

$$t_1 = S_1/c, \quad t_2 = S_2/c$$

( $k_1, k_2$  — коэффициенты, зависящие от геометрии схемы, размеров и формы отверстий).

Из теории частично когерентного света известно, что наблюдаемая интенсивность  $I(P)$  вычисляется по формуле

$$I(P) = \langle u(P, t) u^*(P, t) \rangle, \quad (2)$$

где знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени наблюдения  $T$ , т. е.

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt;$$

знак  $*$  означает комплексное сопряжение.

Подставляя (1) в (2), получим

$$I(P) = k_1 k_1^* \langle u_1(t - t_1) u_1^*(t - t_1) \rangle + k_2 k_2^* \langle u_2(t - t_2) u_2^*(t - t_2) \rangle + \\ + k_1 k_2^* \langle u_1(t - t_1) u_2^*(t - t_2) \rangle + k_2 k_1^* \langle u_2(t - t_2) u_1^*(t - t_1) \rangle.$$

Здесь использовано обозначение  $u_i(t - t_i) = u(P_i, t - t_i)$ . Можно показать, что в случае одинаковых малых отверстий произведения  $k_1 k_2^*$  и  $k_2 k_1^*$  действительны и

$$k_1 k_2^* = k_2 k_1^* = |k_1|^2 \simeq |k_2|^2 \equiv |k|^2.$$

Тогда

$$I(P) = |k|^2 [\langle u_1(t - t_1) u_1^*(t - t_1) \rangle + \langle u_2(t - t_2) u_2^*(t - t_2) \rangle + \\ + 2 \operatorname{Re} \langle u_1(t - t_1) u_2^*(t - t_2) \rangle].$$

Здесь через  $\text{Re } z$  обозначена действительная часть комплексного числа  $z$ .

Условие стационарности волнового поля означает независимость средних значений от начала отсчета времени. Поэтому в первом слагаемом можно положить  $t_1=0$ , во втором  $t_2=0$ , а в третьем  $t=t_2$ . В результате получим

$$I(P) = |k|^2 [\langle u_1(t) u_1^*(t) \rangle + \langle u_2(t) u_2^*(t) \rangle + \\ + 2 \text{Re} \langle u_1(t_2 - t_1) u_2^*(0) \rangle],$$

или в прежних обозначениях

$$I(P) = |k|^2 [\langle u(P_1, t) u^*(P_1, t) \rangle + \langle u(P_2, t) u^*(P_2, t) \rangle + \\ + 2 \text{Re} \langle u(P_1, t_2 - t_1) u^*(P_2, 0) \rangle]. \quad (3)$$

Введем величину

$$\Gamma(P_1, P_2, t_2 - t_1) \equiv \Gamma(P_1, P_2, \tau) \equiv \langle u(P_1, \tau) u^*(P_2, 0) \rangle = \\ = \langle u(P_1, t + \tau) u^*(P_2, t) \rangle. \quad (4)$$

Функция  $\Gamma(P_1, P_2, \tau)$  называется корреляционной функцией полей в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Если  $P_1 = P_2$ , то функция

$$\Gamma(P_1, P_1, \tau) = \langle u(P_1, t + \tau) u^*(P_1, t) \rangle$$

называется автокорреляционной функцией. При  $\tau=0$  автокорреляционная функция

$$\Gamma(P_1, P_1, 0) = \langle u(P_1, t) u^*(P_1, t) \rangle = I(P_1),$$

т. е. сводится к обычной интенсивности (см. (2)).

Вернувшись к (3), видим, что

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2 |k|^2 \text{Re} \Gamma(P_1, P_2, \tau), \quad (5)$$

где

$$I_i(P) = |k|^2 \langle u(P_i, t) u^*(P_i, t) \rangle = |k|^2 I(P_i)$$

— интенсивность в точке  $P$ , если открыто только одно  $i$ -е отверстие.

Используя последнее соотношение, перепишем (5) следующим образом:

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2 \sqrt{I_1(P) \cdot I_2(P)} \cdot \text{Re} \gamma(P_1, P_2, \tau), \quad (6)$$

где величина

$$\gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{\Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\sqrt{I(P_1) \cdot I(P_2)}} \quad (7)$$

называется комплексной степенью когерентности (коэффициентом частичной когерентности).

Формула (6) решает поставленную задачу и называется общим законом интерференции для стационарных оптических полей.

3.2.7. В условиях предыдущей задачи освещение ведется квазимонохроматическим светом, т. е. светом, разброс частот которого подчиняется условию  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ , где  $\omega_0$  — центральная частота.

Определить видность интерференционной картины в той области экрана, в которой с большой точностью можно считать, что  $I_1(P) = I_2(P)$ .

Решение. Поскольку степень когерентности  $\gamma$  в общем случае является комплексным числом, то она допускает следующее представление:

$$\gamma(P_1, P_2, \tau) = |\gamma(P_1, P_2, \tau)| e^{i\omega\tau}, \quad (1)$$

где  $|\gamma(P_1, P_2, \tau)|$  — модуль комплексного числа,  $\omega\tau$  — его аргумент,  $\tau = t_2 - t_1 = \frac{S_2 - S_1}{c}$ . Поскольку по условию задачи освещение ведется квазимонохроматическим светом, с большой степенью точности можно написать:

$$\gamma(P_1, P_2, \tau) \simeq |\gamma(P_1, P_2, \tau)| e^{i\omega_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \tau} \simeq |\gamma(P_1, P_2, \tau)| e^{i\omega_0 \tau}. \quad (2)$$

При этом  $|\gamma|$  — медленно меняющаяся функция на периоде второго сомножителя.

Подставляя (2) в формулу (6) предыдущей задачи, получим

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} |\gamma(P_1, P_2, \tau)| \cos \omega_0 \tau. \quad (3)$$

Из (3) следует

$$I_{\max}(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} |\gamma(P_1, P_2, \tau)|, \quad (4)$$

$$I_{\min}(P) = I_1(P) + I_2(P) - 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} |\gamma(P_1, P_2, \tau)|.$$

Видность интерференционной картины по определению равна

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), получим

$$V = \frac{2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}}{I_1(P) + I_2(P)} |\gamma(P_1, P_2, \tau)|.$$

Так как по условию задачи  $I_1(P) = I_2(P)$ , то

$$V = |\gamma(P_1, P_2, \tau)|. \quad (6)$$

Из (6) следует физический смысл комплексной степени когерентности. В условиях задачи она совпадает с видностью интерференционной картины. Если  $|\gamma| = 1$ , видность максимальна (полностью когерентный свет); если  $|\gamma| = 0$ , то интерференционные поло-

сы отсутствуют (некогерентный свет). Таким образом, величину  $|\gamma(P_1, P_2, \tau)|$  разумно рассматривать как меру когерентности волновых полей.

**3.2.8.** Найти автокорреляционную функцию излучения, если линия испускания узкая и имеет прямоугольную форму в интервале шириной  $\Delta\omega$  около  $\omega_0$ . Интенсивность излучения  $I_0$ .

**Решение.** По определению автокорреляционная функция

$$\Gamma(\tau) = \langle u(t + \tau) \cdot u^*(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t + \tau) \cdot u^*(t) dt.$$

Используя условие стационарности, положим в написанной формуле  $t=0$ . Тогда

$$\Gamma(\tau) = u(\tau) \cdot u^*(0). \quad (1)$$

По условию задачи

$$u(\omega) = \begin{cases} u_0/2\pi, & \text{если } \omega \leq |\omega_0 \pm \Delta\omega/2|, \\ 0, & \text{если } \omega > |\omega_0 \pm \Delta\omega/2|. \end{cases} \quad (2)$$

Зная (2), легко вычислить  $u(t)$ , так как

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3)$$

(см. формулу (2) задачи 3.2.1).

Подставляя (2) в (3), получим

$$u(t) = \frac{u_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{u_0}{\pi t} e^{-i\omega_0 t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t. \quad (4)$$

Отсюда следует

$$u(\tau) = \frac{u_0}{\pi \tau} e^{-i\omega_0 \tau} \sin \frac{\Delta\omega}{2} \tau,$$

$$u^*(0) = \frac{u_0 \Delta\omega}{2\pi}.$$

Подставляя эти значения в (1), получим

$$\Gamma(\tau) = \frac{u_0^2 \Delta\omega}{2\pi^2 \tau} e^{-i\omega_0 \tau} \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} \tau.$$

Так как  $\Gamma(0) = I_0$ , то

$$\Gamma(\tau) = I_0 e^{-i\omega_0 \tau} \frac{\sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} \tau}{\frac{\Delta\omega}{2} \tau}. \quad (5)$$

Поскольку наблюдаемая интенсивность выражается через действительную часть автокорреляционной функции, то окончательно запишем

$$\operatorname{Re} \Gamma(\tau) = I_0 \cos \omega_0 \tau \frac{\sin \frac{\Delta \omega}{2} \tau}{\frac{\Delta \omega}{2} \tau}. \quad (6)$$

3.2.9. В интерференционном опыте Юнга наблюдается интерференционная картина в области перекрывания пучков, прошедших через два отверстия (рис. 16), расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга в точках с координатами  $(0, 0)$  и  $(x, y)$ . Отверстия освещаются источником, представляющим из себя равномерно излучающий на длине волны  $\lambda$  диск радиуса  $R \gg l$ , находящийся на расстоянии  $r \gg l$  от отверстий. Определить коэффициент частичной когерентности.

Решение. Для одного из независимых излучателей, находящегося в точке  $(x', y')$ , имеем

$$\begin{aligned} s_1^2 &= r^2 + x'^2 + y'^2, \\ s_2^2 &= r^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2. \end{aligned}$$

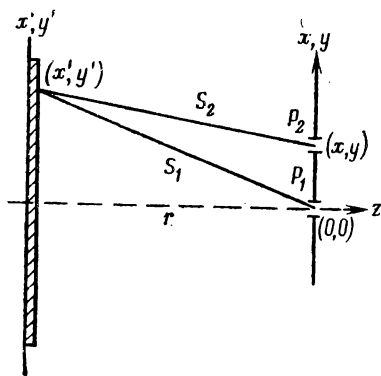


Рис. 16

Вычитая второе равенство из первого, находим

$$\begin{aligned} s_1^2 - s_2^2 &= (s_1 - s_2)(s_1 + s_2) = 2(xx' + yy') - (x^2 + y^2) = \\ &= 2(xx' + yy') - l^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$s_1 - s_2 = \frac{2(xx' + yy') - l^2}{s_1 + s_2}.$$

Так как по условию задачи  $r \gg l$ , то с большой степенью точности можно считать, что

$$s_1 + s_2 \approx 2r, \quad \frac{l^2}{2r} \ll 1.$$

Таким образом, разность хода для указанного излучателя есть

$$s_1 - s_2 \approx \frac{xx' + yy'}{r}. \quad (1)$$

Разобьем источник на множество независимых точечных излучателей и обозначим через  $u_k(t)$  возмущение, создаваемое  $k$ -м излучателем на первом отверстии в момент времени  $t$ . Возмуще-



ние, создаваемое этим же излучателем на втором отверстии, будет отличаться от возмущения на первом отверстии фазовым сдвигом  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (s_1 - s_2)$ , обусловленным разностью хода  $s_1 - s_2$ , и иметь вид

$$u_k(t) e^{-i\delta} = u_k(t) e^{-i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_k + yy'_k}{r} \right]}. \quad (2)$$

Поле в точках  $P_1$  и  $P_2$  создается всеми излучателями источника и имеет вид

$$u(P_1, t) = \sum_k u_k(t),$$

$$u(P_2, t) = \sum_k u_k(t) e^{-i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_k + yy'_k}{r} \right]}. \quad (3)$$

Корреляционная функция, отвечающая пространственной когерентности, есть

$$\Gamma(P_1, P_2, 0) = \langle u(P_1, t) u^*(P_2, t) \rangle. \quad (4)$$

Подставляя в (4) формулы (3), получим

$$\Gamma(P_1, P_2, 0) = \sum_k \langle u_k(t) u_k^*(t) \rangle e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_k + yy'_k}{r} \right]} +$$

$$+ \sum_{m \neq k} \langle u_k(t) u_m^*(t) \rangle e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_m + yy'_m}{r} \right]}. \quad (5)$$

Второй член в этой формуле пропадает при усреднении из-за некогерентности независимых излучателей.

Известно, что  $\langle u_k(t) u_k^*(t) \rangle = I_k$  — интенсивность, создаваемая  $k$ -м излучателем (см. 3.2.6). Считая, что  $k$ -й независимый точечный излучатель имеет координаты  $(x', y')$ , и переходя в (5) от суммирования к интегрированию, получим

$$\Gamma(P_1, P_2, 0) = \iint_S I(x', y') e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx' + yy'}{r} \right]} dx' dy', \quad (6)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения излучателя и интегрирование ведется по этому сечению.

Коэффициент частичной когерентности есть

$$\gamma(x, y) = \frac{\iint_S I(x', y') e^{i \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx' + yy'}{r} \right)} dx' dy'}{\iint_S I(x', y') dx' dy'}. \quad (7)$$

По условию задачи источник является равномерно излучающим диском. Это означает, что

$$I(x', y') = I_0 = \text{const.}$$

Формула (7) в этом случае принимает вид

$$\gamma(x, y) = \frac{\iint_S e^{i \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx' + yy'}{r} \right)} dx' dy'}{\pi R^2}, \quad (8)$$

где  $\pi R^2$  — площадь излучающего диска.

Оси координатной системы  $(x, y)$  направлены так, чтобы точка  $P_2$  находилась на оси  $x$ . Тогда

$$\begin{aligned} \gamma(x=l) &= \frac{\iint_S e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{r} x'} dx' dy'}{\pi R^2} = \frac{\int_0^R e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{r} x'} dx' \int_0^{\sqrt{R^2 - x'^2}} dy'}{\pi R^2} = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \sqrt{R^2 - x'^2} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{r} x'} dx'. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку наблюдаемая интенсивность выражается через действительную часть коэффициента взаимной когерентности, то достаточно вычислить  $\text{Re } \gamma(l)$ . Из (9) следует

$$\text{Re } \gamma(l) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \sqrt{R^2 - x'^2} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{r} x' \right) dx',$$

или

$$\text{Re } \gamma(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \cos \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \frac{R}{r} x \right) dx, \quad (10)$$

где  $x = x'/R$ .

Для получившегося интеграла имеем

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \cos(ax) dx = \frac{\pi}{2a} J_1(a), \quad (11)$$

где  $J_1(a)$  — функция Бесселя 1-го порядка.

Учитывая (11), получим

$$\text{Re } \gamma(l) = \frac{\lambda}{2\pi l a} J_1 \left( \frac{\pi l a}{\lambda} \right), \quad (12)$$

где  $a \approx 2R/r$  — угловой размер источника.

**3.2.10.** Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой вариант интерференционной схемы Юнга, в которой расстоя-

ние между отверстиями может изменяться. В этот интерферометр поступает свет от одиночной звезды Бетельгейзе, излучающей на длине волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  см, расстояние до которой составляет 652 световых года. При увеличении расстояния между отверстиями видность интерференционной картины ослабевает и при значении  $l = l_0 = 720$  см обращается в нуль. Найти диаметр  $d$  звезды Бетельгейзе.

Решение. Можно считать, что звезда Бетельгейзе является источником квазимонохроматического света. Поэтому видность интерференционной картины однозначно определяется коэффициентом частичной когерентности (см. формулу (6) задачи 3.2.7), который был вычислен в задаче 3.2.9. Известно, что первый ненулевой корень функции Бесселя  $J_1(x)$  равен  $x_1 = 3,83$ , т. е.  $\frac{\pi l_0 \alpha}{\lambda} = 3,83$

(см. формулу (12) задачи 3.2.9). Отсюда  $\alpha = \frac{3,83\lambda}{\pi l_0}$ . Так как

$$\alpha = \frac{2R}{r} = \frac{d}{r}, \quad \text{то} \quad d = 3,83 \frac{\lambda r}{\pi l_0} \cong 61 \cdot 10^7 \text{ км},$$

т. е. диаметр звезды Бетельгейзе почти в 450 раз больше диаметра Солнца и, следовательно, больше, чем диаметры орбит не только Земли, но и Марса.

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Линейно поляризованный свет в виде плоской монохроматической электромагнитной волны падает под углом  $\varphi = 45^\circ$  на границу раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Определить распределение интенсивности света при условии, что  $\frac{n_2}{n_1} \gg 1$  в двух случаях: а) электрический вектор  $E$  волны колеблется в плоскости падения; б) электрический вектор колеблется в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.

Решение. Условие  $\frac{n_2}{n_1} \gg 1$  означает, что коэффициент отражения оказывается порядка единицы (см. формулы (2) задачи 3.2.2 разд. III), т. е. преломление практически отсутствует и волна полностью отражается от границы раздела. В указанном приближении из формул Френеля

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}; \quad E'_{1\perp} = -E_{1\perp} \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)},$$

записанных в виде

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel} \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \chi}{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \chi}, \quad E'_{1\perp} = E_{1\perp} \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \chi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \chi},$$

следует, что

$$E'_{1\parallel} = E_{1\parallel}; \quad E'_{1\perp} = -E_{1\perp}. \quad (1)$$

(Напомним, что формулы Френеля, а следовательно, и формулы (1), связывают амплитуды соответствующих волн.)

Рассмотрим случай а). Вектор  $\vec{E}$  электромагнитной волны, по условию задачи лежит в плоскости  $xz$  (рис. 17) и изменяется по закону

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{v_1} \right) \right];$$

$$\vec{E}'_1 = \vec{A}'_1 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{v_1} \right) \right],$$

где  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}'_1$  — амплитуды падающей и отраженной плоских монохроматических волн;  $v_1$  — скорость распространения света в первой среде. Декартовы компоненты рассматриваемых векторов имеют вид

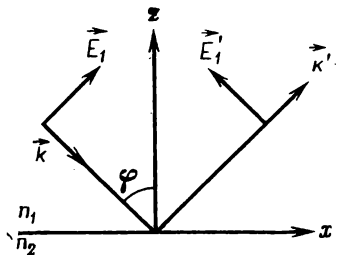


Рис. 17

$$\begin{aligned} E_{1x} &= \frac{A_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega\tau_1); & E'_{1x} &= -\frac{A'_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega\tau_2); \\ E_{1y} &= 0; & E'_{1y} &= 0; \\ E_{1z} &= \frac{A_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega\tau_1); & E'_{1z} &= \frac{A'_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega\tau_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\tau_1 = t - \frac{x - z}{\sqrt{2}v_1}, \quad \tau_2 = t - \frac{x + z}{\sqrt{2}v_1}.$$

При выводе формул (2) учитывалось, что  $\varphi = 45^\circ$ . Компоненты электрического вектора в суммарной волне с учетом (1) и (2):

$$E_x = E_{1x} + E'_{1x} = \sqrt{2} A_1 \sin \left( \frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{\sqrt{2}v_1} \right) \right]; \quad (3)$$

$$E_y = E_{1y} + E'_{1y} = 0;$$

$$E_z = E_{1z} + E'_{1z} = \sqrt{2} A_1 \cos \left( \frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1} \right) \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{\sqrt{2}v_1} \right) \right].$$

Каждая из формул (3) описывает волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  со скоростью  $\sqrt{2}v_1$ . Амплитуда этой волны непостоянна и периодически меняется в направлении  $z$ . По определению

$$I = \sqrt{\epsilon_1} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\epsilon_1} \langle E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \rangle.$$

Учитывая (3), окончательно получим

$$I = \sqrt{\epsilon_1} A_1^2, \quad (4)$$

т. е. интенсивность не зависит от  $z$  и, следовательно, первая среда оказывается равномерно освещенной.

Рассмотрим теперь случай б). Вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен плоскости рис. 17 (ось  $y$  направлена за плоскость рисунка) и изменяется по тому же закону, что и в случае а). Однако декартовы компоненты падающей и отраженной волн имеют вид

$$\begin{aligned} E_{1x} &= 0; & E'_{1x} &= 0; \\ E_{1y} &= -A_1 \sin(\omega\tau_1); & E'_{1y} &= -A'_1 \sin(\omega\tau_2); \\ E_{1z} &= 0; & E'_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для суммарной волны имеем

$$\begin{aligned} E_x &= 0; \\ E_y &= -2A_1 \sin\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1}\right) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\sqrt{2}v_1}\right)\right]; \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Интенсивность результирующего колебания

$$I = 2\sqrt{\epsilon_1} A_1^2 \sin^2\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1}\right). \quad (7)$$

В отличие от случая а) в случае б) интенсивность света в первой среде зависит от  $z$ . Если первая среда является фотоэмульсией, то в случае б) в эмульсии будет образована система темных параллельных полос ( $z = \text{const}$ ), в то время как в случае а) почернение эмульсии равномерно.

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Луч света, исходящий из точечного источника  $S$ , падает под углом  $\varphi$  на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной  $h$ . Показатель преломления пластинки  $n$ . Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости объектива (рис. 18). Какому условию должна удовлетворять оптическая разность хода интерферирующих лучей для существования в данной точке максимума (минимума) интерференционной картины?

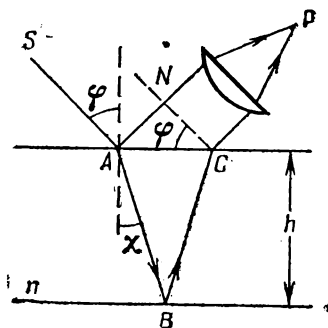


Рис. 18

Решение. Оптическая разность хода между лучами  $SANP$  и  $SABCP$  равна

$$d = n(AB + BC) - AN. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$AB = BC = \frac{h}{\cos \chi}, \quad (2)$$

где  $\chi$  — угол преломления;

$$AN = AC \sin \varphi = 2h \operatorname{tg} \chi \cdot \sin \varphi, \quad (3)$$

$$\sin \varphi / \sin \chi = n. \quad (4)$$

Из (1)—(4) получаем

$$d = 2nh \cos \chi. \quad (5)$$

Соответствующая разность фаз

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \chi, \quad (6)$$

где  $\lambda$  — длина волны падающего света. При записи разности фаз, соответствующей оптической разности хода  $d$ , необходимо учитывать изменение фазы на  $\pi$ , которое согласно формуле Френеля (4) задачи 3.1.2 разд. III происходит при отражении от одной из поверхностей пластинки. Поэтому полная разность фаз в точке  $P$

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \chi \pm \pi = \frac{4\pi h}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} \pm \pi. \quad (7)$$

Интенсивность в интерференционной картине меняется в соответствии с формулой (6) задачи 3.1.1. Максимумам интенсивности соответствует условие

$$d = 2nh \cos \chi \pm \lambda/2 = m\lambda, \quad (8)$$

минимумам —

$$d = 2nh \cos \chi \pm \lambda/2 = (2m + 1) \lambda/2, \quad (9)$$

где  $m=0, 1, 2, \dots$  (Дополнительная разность хода  $\pm \lambda/2$  соответствует дополнительной разности фаз  $\pm \pi$ .) Учет многократного отражения не меняет результатов задачи (см. задачу 3.5.1). Заданная полоса ( $m=\text{const}$ ) характеризуется постоянством величины угла  $\chi$  (а значит, и  $\varphi$ ) и, следовательно, создается светом, падающим на пластинку под каким-то определенным углом. Поэтому такие полосы называют полосами равного наклона.

**3.4.2.** Выпуклая линза с большим радиусом кривизны  $R$  лежит на плоскопараллельной стеклянной пластинке и освещается нормально падающим параллельным пучком монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ . В воздушном зазоре между соприкасающимися поверхностями линзы и пластинки в отраженном свете наблюдаются так называемые кольца Ньютона. Найти радиусы темных колец.

**Решение.** Воздушный клин, на котором происходит интерференция, в случае, когда радиус кривизны линзы велик, имеет очень малый угол. Поэтому с большой степенью точности можно считать, что клин составлен из отдельных кусочков плоскопараллельных пластинок, и для каждого такого кусочка, характеризуемого своей толщиной  $h$ , применять формулу (5) задачи 3.4.1 для разности хода интерферирующих лучей:

$$d = 2nh \cos \chi \pm \frac{\lambda}{2},$$

причем  $\cos \chi = \text{const}$ . Считая, что дополнительная разность хода, обусловленная сдвигом фазы на  $\pi$  при отражении от плоскопарал-

лельной пластинки, равна  $\lambda/2$ , запишем условие минимума интерференционной картины ( $\chi=0$  при нормальном освещении) в виде:

$$2nh + \lambda/2 = (2m + 1) \lambda/2,$$

или

$$h = \frac{m\lambda}{2} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

С другой стороны,

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Разлагая корень по биному Ньютона и ограничиваясь членами второго порядка малости, получим  $h \simeq r^2/2R$ . И для радиуса  $m$ -го кольца Ньютона окончательно имеем

$$r_m = \sqrt{mR\lambda}.$$

Кольца Ньютона являются кольцами равной толщины.

**3.4.3.** Полосы равной толщины, получающиеся в тонком стеклянном клине с показателем преломления  $n=1,5$ , при освещении рассеянным монохроматическим светом проектируются на экран, перед которым помещена квадратная диафрагма со стороной  $d=1$  см, отстоящая от клина на расстоянии  $a=50$  см. Какой максимальный порядок интерференции  $N$  может при этом наблюдаться на экране? Главная оптическая ось проектирующей системы приблизительно перпендикулярна к поверхности клина.

**Решение.** Условие наблюдения светлых полос равной толщины в тонком клине имеет вид

$$2nh \cos \chi \pm \lambda/2 = m\lambda, \quad (1)$$

где  $\cos \chi$  берется для точек источника, от которых свет доходит в точку наблюдения. При малых углах клина величина  $\cos \chi$  достаточно постоянна. Для лучей, отраженных нормально от клина, имеем систему полос равной толщины, определяемых условием

$$2nh = m\lambda. \quad (2)$$

(Несущественная в данной задаче дополнительная разность хода  $\pm \lambda/2$  опущена.) Поскольку клин освещается рассеянным светом, условие наблюдения полос равной толщины (1) нарушается ( $\cos \chi \neq \text{const}$ ) и порядок наблюдаемой интерференционной картины ограничен.

Условие «смазывания» интерференционной картины сводится к требованию одновременного выполнения равенств

$$2nh = N\lambda, \quad 2nh \cos \chi = (2N + 1)\lambda/2, \quad (3)$$

где  $\chi$  — угол преломления, отвечающий предельному углу падения  $\varphi$  на клин, при котором свет пропускается диафрагмой на экран;  $N$  — максимальный порядок наблюдаемой интерференционной картины. Решая (3) относительно  $N$ , получим

$$N = \frac{1}{2(\cos \chi - 1)}. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\cos \chi = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \varphi}, \quad (5)$$

Из условия задачи ясно, что

$$\sin \varphi \approx \frac{d}{a} \ll 1. \quad (6)$$

Учитывая (6), разлагаем (5) по биному Ньютона и, ограничившись членом второго порядка малости, получим

$$\cos \chi \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{na} \right)^2. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), находим

$$|N| \approx \left( \frac{na}{d} \right)^2 = 5625.$$

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** На плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной  $h$  с показателем преломления  $n$ , находящуюся в воздухе, под углом  $\varphi$  падает плоская волна монохроматического света. Свет поляризован так, что вектор электрического поля колеблется в плоскости падения. Найти интенсивность отраженного света, если интенсивность падающего света равна  $I$ .

**Решение.** Луч, падающий на плоскопараллельную пластинку, испытывает в ней многократное отражение (рис. 19). Поскольку падающий луч по условию задачи монохроматический, то отраженные (прошедшие) лучи интерферируют друг с другом. Таким образом, задача нахождения интенсивности отраженного (прошедшего) света сводится к учету как многократного отражения, так и интерференции рассматриваемых лучей.

Уравнение падающей волны имеет вид

$$E = A \sin \omega \tau,$$

где  $A$  — амплитуда волны,

$$\tau = t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{v_1}$$

(см., например, задачу 3.3.1). Для дальнейшего удобно записать уравнение падающей волны с помощью комплексной экспоненты, т. е.

$$E = Ae^{i\omega\tau}. \quad (1)$$

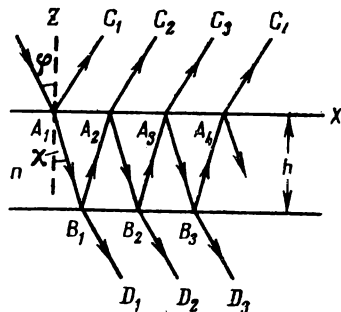


Рис. 19



Уравнение волны, отразившейся в точке  $A_1$ , имеет вид

$$E'_1 = A'_1 e^{i\omega\tau'}, \quad (2)$$

где  $A'_1$  — амплитуда отраженного в точке  $A_1$  луча;

$$\tau' = t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{v_1}.$$

Введем коэффициент отражения  $r$  и пропускания  $t$  для волны, идущей из среды в пластинку, соотношениями

$$r = \frac{A'}{A}; \quad t = \frac{A''}{A}, \quad (3)$$

где  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  — амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн соответственно.

Пусть  $r'$  и  $t'$  — соответствующие коэффициенты для волны, идущей из пластинки в окружающую среду. (Данное здесь определение коэффициентов отражения и пропускания отличается от определения, используемого в разд. III.) Известно, что лучи  $A_1C_1$  и  $A_2C_2$  обладают разностью хода  $d = 2nh \cos \chi$ , которой соответствует фазовый сдвиг

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \chi. \quad (4)$$

(см. задачу 3.4.1). Ясно, что фазовый сдвиг (4) будет характеризовать каждую пару соседних отраженных лучей. (Несущественный в данной задаче фазовый сдвиг  $\pm\pi$  в формуле (4) опущен.)

С учетом всего сказанного уравнение волны, распространяющейся по лучу  $A_1C_1$ , имеет вид

$$E'_1 = rAe^{i\omega\tau'}. \quad (5)$$

Уравнение волны, распространяющейся по лучу  $A_2C_2$ ,

$$E'_2 = t'r'tAe^{i\delta}e^{i\omega\tau'}. \quad (6)$$

Уравнение волны, распространяющейся по лучу  $A_3C_3$ ,

$$E'_3 = t'r'^2tAe^{i2\delta}e^{i\omega\tau'}. \quad (7)$$

Наконец, для  $p$ -го луча, отраженного от пластинки, имеем

$$E'_p = t'r'^{(2p-3)}tAe^{i(p-1)\delta}e^{i\omega\tau'}. \quad (8)$$

Амплитуда результирующей отраженной волны

$$\begin{aligned} A'(p) = & [r + t'tr'e^{i\delta} + t'tr'^2e^{i2\delta} + t'tr'^3e^{i3\delta} + \dots + \\ & + t't'r'^{(2p-3)}e^{i(p-1)\delta}] A = \{r + t'tr'e^{i\delta} [1 + r'^2e^{i\delta} + r'^4e^{i2\delta} + \\ & + \dots + r'^{2(p-2)}e^{i(p-2)\delta}] \} A. \end{aligned}$$

Вычисляя сумму членов геометрической прогрессии в квадратных скобках, получим

$$A'(p)' = \left\{ r + \left[ \frac{1 - r'^2 (p-1) e^{i(p-1)\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right] t' t r' e^{i\delta} \right\} A. \quad (9)$$

Если пластинка достаточно длинна, то число отраженных волн будет велико. Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$ , получим

$$A' \equiv A'(\infty) = \left( r + \frac{t' t r' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right) A. \quad (10)$$

Для дальнейших преобразований полученного выражения отметим, что согласно формулам Френеля

$$r = -r'. \quad (11)$$

Наконец, введем величины

$$R = r^2 = r'^2 \quad \text{и} \quad T = t t'. \quad (12)$$

(Величины  $R$  и  $T$  иногда называют отражательной и пропускательной способностями поверхностей пластинок.) Используя формулы Френеля, можно показать, что

$$R + T = 1. \quad (13)$$

Учитывая (11)—(13), находим

$$A' = \frac{(1 - e^{i\delta}) \sqrt{R}}{1 - R e^{i\delta}} A. \quad (14)$$

Отметим, что амплитуды в (14) комплексные, а интенсивность света связана с соответствующей амплитудой следующим образом:

$$I = A A^*,$$

где  $A^*$  — комплексно сопряженная амплитуда. С учетом этого замечания интенсивность отраженного света

$$I' = A' A'^* = \frac{(1 - e^{i\delta}) \sqrt{R}}{1 - R e^{i\delta}} A \cdot \frac{(1 - e^{-i\delta}) \sqrt{R}}{1 - R e^{-i\delta}} A^* = \frac{2(1 - \cos \delta) R}{1 + R^2 - 2R \cos \delta} I.$$

Окончательно имеем

$$I' = \frac{4R \sin^2 \delta/2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \delta/2} I, \quad (15)$$

где фазовый сдвиг  $\delta$  определяется формулой (4). (Формула (15) называется формулой Эйри.) Отсюда следует, что интенсивность отраженного света будет максимальной, когда

$$2nh \cos \chi \pm \lambda/2 = m\lambda \quad (16)$$

(сравни с формулой (9) задачи 3.4.1).

3.5.2. Пучок монохроматического света попадает в пластинку Люммера—Герке через отверстие  $AB$ , ограниченное диафрагмой  $DD'$ , так, что угол падения в пластинке близок к критическому (рис. 20). Интерференционная картина, образованная вышедшими с каждой стороны пластинки световыми пучками, наблюдается в фокальной плоскости объектива. Найти распределение ин-

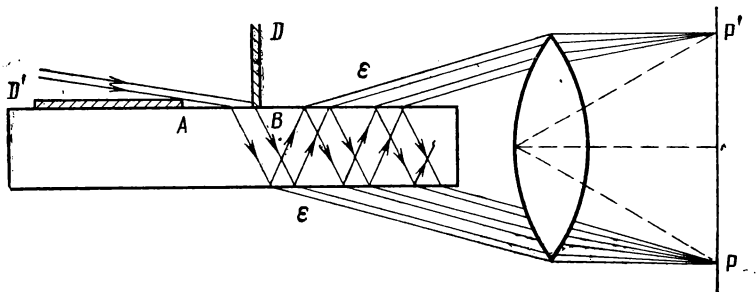


Рис. 20

тенсивности, если в отсутствие пластинки интенсивность в точке наблюдения равнялась  $I$ .

Решение. Пусть  $P$  и  $P'$  — фокальные точки объектива для света, вышедшего из пластинки под углом выхода  $\epsilon$ , и пусть  $A$  — комплексная амплитуда в точке  $P$  в отсутствие пластинки. Комплексные амплитуды в пучках нижней группы, пришедших в точку  $P$ , с точностью до несущественного постоянного фазового множителя равны (см. задачу 3.5.1) величинам

$$tt'A; \quad tt'r'^2 Ae^{i\delta}; \quad \dots, \quad tt'r'^{(2p-1)} Ae^{i(p-1)\delta}.$$

Следовательно, в точке  $P$  при суперпозиции  $p$  первых пучков для результирующей амплитуды имеем

$$A''(p) = (1 + r'^2 e^{i\delta} + \dots + r'^{(2p-1)} e^{i(p-1)\delta}) tt'A = \frac{1 - R^p e^{ip\delta}}{1 - R e^{i\delta}} TA, \quad (1)$$

где  $R$  и  $T$  — отражательная и пропускательная способности пластинки;  $\delta$  — разность фаз между соседними интерферирующими лучами, соответствующая разности хода между этими лучами:

$$d = 2h \sqrt{n^2 - \cos^2 \epsilon}. \quad (2)$$

В пределе, считая, что число пучков  $p \rightarrow \infty$ , находим

$$A'' \equiv A''(\infty) = \frac{T}{1 - R e^{i\delta}} A.$$

Таким образом, интенсивность в точке  $P$

$$I'' = \frac{1}{1 + F \sin^2 \delta/2} I, \quad (3)$$

где  $I$  — интенсивность в точке  $P$  в отсутствие пластинки; в свою очередь,

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}. \quad (4)$$

Аналогично для амплитуд в точке  $P'$  в пучках от верхней поверхности имеем

$$tt'r'A; \quad tt'(r')^3 e^{i\delta} A; \quad \dots \quad tt'(r')^{(2p-1)} e^{i(p-1)\delta} A.$$

Следовательно, результирующая амплитуда в точке  $P'$

$$\begin{aligned} A'(p) &= (1 + (r')^2 e^{i\delta} + \dots + (r')^{2(p-1)} e^{i(p-1)\delta}) tt'r'A = \\ &= \frac{1 - R^p e^{ip\delta}}{1 - R e^{i\delta}} \sqrt{R} T A. \end{aligned} \quad (5)$$

В пределе, когда  $p \rightarrow \infty$ , интенсивность в точке  $P'$  запишется в виде

$$I' \equiv I'(\infty) = \frac{R}{1 + F \sin^2 \delta/2} I = R I''. \quad (6)$$

Из (3) и (6) следует, что максимумы в интерференционных картинах, лежащих под и над пластинкой, находятся на одинаковых угловых расстояниях относительно нормали к ней. Формулы (3) и (6) носят приближенный характер, поскольку число пучков, участвующих в интерференции в реальных пластинках Льюммера—Герке, невелико. Однако положение максимумов и минимумов интерференционной картины этими формулами передается верно.

### 6-й тип задач (3.6)

**3.6.1.** Интерференционные полосы, полученные в интерферометре Жамена (рис. 21), наблюдаются в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием  $f=10$  см. Пластины интерферометра сделаны из стекла с показателем преломления  $n=1,5$ , имеют толщину  $h=2$  см и образуют между собой малый угол  $\alpha \sim 1'$ ; свет падает на пластины под углом  $45^\circ$ . Расстояние  $\Delta x$  между полосами интерференции равно 3,84 мм. Найти длину волны света, создающего интерференционную картину.

**Решение.** Из рис. 21 видно, что если пластинки  $A$  и  $B$

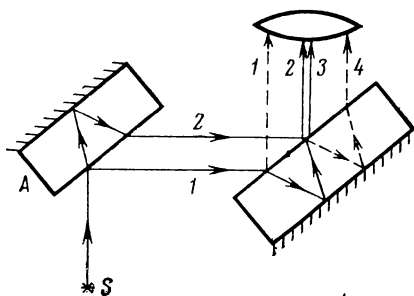


Рис. 21

интерферометра одинаковы и строго параллельны, то разность хода между лучами 2 и 3 отсутствует. Однако если пластинки  $A$  и  $B$  образуют между собой малый угол  $\alpha$ , то между указанными лучами возникает разность хода

$$d = 2hn \cos \chi_1 - 2hn \cos \chi_2, \quad (1)$$

где  $\chi_1$  и  $\chi_2$  — углы преломления в пластинках  $A$  и  $B$  соответственно. Если эти углы мало отличаются друг от друга, то можно написать

$$d = 2hn \sin \chi \cdot \Delta \chi, \quad \chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}. \quad (2)$$

Из закона преломления света

$$\sin \varphi = n \sin \chi \quad (3)$$

имеем

$$\Delta \chi = \frac{\cos \varphi \cdot \Delta \varphi}{n \cos \chi}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и учитывая (3), получим

$$d = \frac{h \cdot \sin 2\varphi \cdot \Delta \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}. \quad (5)$$

Для лучей, распространяющихся в плоскости, перпендикулярной ребру двугранного угла  $\alpha$  между пластинками, угол  $\Delta \varphi$  равен  $\alpha$ . В этом случае

$$d = \frac{h\alpha \cdot \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}. \quad (6)$$

При переходе от одного места интерференционной картины к другому разность хода между лучами меняется. Из (6) следует, что изменение разности хода

$$\delta d = h\alpha \frac{4 \cos 2\varphi (n^2 - \sin^2 \varphi) + \sin^2 2\varphi}{2 (n^2 - \sin^2 \varphi)^{3/2}} \delta \varphi.$$

Так как по условию задачи  $\varphi = 45^\circ$ , то

$$\delta d = \frac{h\alpha}{2 (n^2 - 0,5)^{3/2}} \delta \varphi. \quad (7)$$

Для соседних максимумов

$$\delta d = \lambda. \quad (8)$$

В результате (7) принимает вид

$$\lambda = \frac{h\alpha}{2 (n^2 - 0,5)^{3/2}} \delta \varphi, \quad (9)$$

где  $\delta \varphi$  — угловое расстояние между соседними максимумами, которое связано с линейным расстоянием  $\Delta x$  соотношением

$$\delta \varphi = \frac{\Delta x}{f}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\lambda = \frac{h\alpha \cdot \Delta x}{2f(n^2 - 0,5)^{3/2}} = 5000 \text{ \AA}, \quad (11)$$

**3.6.2.** Интерферометр Майкельсона освещается светом  $D$ -линии Na, которая представляет собой две близкие спектральные линии со средней длиной волны 5893 Å. Найти разность длин волн  $D$ -линий Na, если для наблюдения двух соседних «смазываний» интерференционной картины потребовалось переместить подвижное зеркало интерферометра на 0,02894 см.

**Решение.** Пусть при разности длин плеч интерферометра  $h_1$  наблюдается интерференционный максимум  $m_1$ -го порядка для спектральной линии с длиной волны  $\lambda_1$ , т. е.

$$2h_1 = m_1 \lambda_1, \quad (1)$$

Если же эта разность хода соответствует интерференционному минимуму для спектральной линии с длиной волны  $\lambda_2$ , то

$$2h_1 = m_1 \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2}. \quad (2)$$

Условие первого «смазывания» интерференционной картины

$$m_1 \lambda_1 = m_1 \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2}. \quad (3)$$

Для следующего «смазывания»

$$2h_2 = m_2 \lambda_1, \quad 2h_2 = m_2 \lambda_2 + \frac{3}{2} \lambda_2. \quad (4)$$

Отсюда

$$m_2 \lambda_1 = m_2 \lambda_2 + \frac{3}{2} \lambda_2.$$

Тогда

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta \lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(h_2 - h_1)} \approx \frac{\lambda^2_{\text{ср}}}{2\delta}, \quad (5)$$

где  $\delta$  — перемещение подвижного зеркала при переходе к соседнему «смазыванию». Подставляя численные значения, получим

$$\Delta \lambda = 6 \text{ \AA}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** В каком случае две электромагнитные волны одинаковой частоты складываются всегда (т. е. при любых фазовых соотношениях) так, что интенсивность результирующего колебания  $I$  равна сумме интенсивностей исходных колебаний  $I_1$  и  $I_2$ ?

- 4.2. Напишите, чему равна разность фаз между двумя когерентными лучами, если разность хода между ними равна  $d$ .
- 4.3. Как связана интенсивность света с амплитудой плоской монохроматической волны?
- 4.4. Начертите схему интерференционной установки с билинзой Бийе, половинки которой раздвинуты на некоторое малое расстояние. Укажите на чертеже область интерференции.
- 4.5. Может ли наблюдаться интерференционная картина в солнечном свете?
- 4.6. Получите формулу (3) задачи 3.2.4.
- 4.7. Почему опыт Винера доказывает, что фотохимическое действие света связано с воздействием на эмульсию электрического вектора  $\vec{E}$  электромагнитной волны?
- 4.8. Линейно поляризованный свет падает под углом  $45^\circ$  на металлическое зеркало, покрытое очень тонким фотослоем. В одном случае вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости падения, а в другом перпендикулярен к плоскости падения. В каком случае фотослой почернеет?
- 4.9. Зимой на стеклах трамваев и автобусов образуются тонкие пленки наледи, окрашивающие все видимое сквозь них в зеленоватый цвет. Оценить, какова наименьшая толщина этих пленок (показатель преломления наледи принять равным 1,33).
- 4.10. Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, обычно темный?
- 4.11. В установке для наблюдения колец Ньютона плоско-выпуклая линза сделана подвижной и может перемещаться в направлении, перпендикулярном к пластинке. Описать, что произойдет с кольцами Ньютона при удалении и приближении линзы к пластинке, если кольца получаются в монохроматическом свете.
- 4.12. Как меняется вид полос равной толщины в интерферометре Майкельсона при изменении угла между зеркалами?
- 4.13. Предложите способ демонстрации интерференционной картины от плоскопараллельной пластинки (узкого клина) на экране перед аудиторией.
- 4.14. Опишите качественно вид интерференционной картины в пластинке Льюмера—Герке. Каким образом можно наблюдать эту картину?
- 4.15. Какая интерференционная картина будет наблюдаться при освещении монохроматическим светом двух скрещенных пластинок Льюмера—Герке, т. е. двух пластинок, расположенных одна за другой вдоль прямой линии, но повернутых друг относительно друга на  $90^\circ$ ?
- 4.16. Предположив, что отражательная способность плоскопараллельной пластинки  $R \ll 1$ , покажите, что формула (15) задачи 3.5.1 принимает вид, типичный для двух интерферирующих лучей.

4.17. Почему в интерферометре Жамена лучи 1 и 4 (рис. 21) не принимают участия в образовании интерференционной картины?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

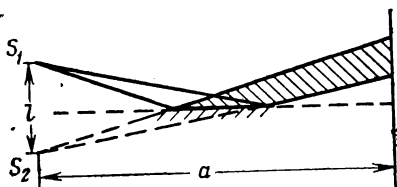
5.1. Показать, что если разность фаз двух складываемых колебаний беспорядочно меняется во времени, т. е. за время наблюдения все значения разности фаз равновероятны, то энергия результирующего колебания равна сумме энергий исходных колебаний.

5.2. Найти распределение интенсивности на экране в установке с зеркалами Френеля (рис. 11). Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

Ответ.

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{2\pi x b \alpha}{\lambda(a+b)}.$$

5.3. Найти распределение интенсивности на экране в установке с зеркалом Ллойда (рис. 22), предполагая, что интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.



Ответ.

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi x l}{\lambda a}.$$

Рис. 22

5.4. Определить вид поверхностей равной интенсивности в опыте с зеркалами Френеля, если источник света 1) точка; 2) щель, параллельная линии пересечения зеркал.

*Примечание.* Предполагается, что отдельные участки щели когерентны между собой и колеблются в одной фазе. Это можно осуществить, например, освещая щель плоской волной.

Ответ. Поверхности равной интенсивности:

- 1) гиперболоиды вращения с осью вращения  $S_1 S_2$ ,
- 2) гиперболические цилиндры.

5.5. Найти распределение интенсивности на экране в установке с бипризмой Френеля (рис. 12), предполагая, что интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

Ответ.

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{2\pi(n-1)b\alpha}{\lambda(a+b)}.$$

5.6. В условиях задачи 3.1.3 найти ширину полос интерференции  $\Delta x$  в случае наклонного падения лучей на экран.

Ответ.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta \cos \varphi},$$

где  $\varphi$  — угол падения.



5.7. Определить угол  $\alpha$  между зеркалами Френеля (рис. 11), если расстояние  $\Delta x$  между полосами интерференции на экране равно 1 мм,  $a=1$  м,  $b=10$  см,  $\lambda=4861$  Å.

Ответ.

$$\alpha \approx \frac{\lambda(a+b)}{2b \cdot \Delta x} \approx 9' 10''.$$

5.8. Найти ширину полос интерференции в установке с зеркалами Ллойда (рис. 22).

Ответ.  $\Delta x = \lambda a/l$ .

5.9. Для наблюдения полос интерференции используется билинза, изготовленная из линзы с фокусным расстоянием  $f=12$  см. Половинки линзы раздвинуты на расстояние  $d=1,1$  мм. Источником света является щель, расположенная на расстоянии  $a=20$  см от билинзы. Экран находится на расстоянии  $L=480$  см от билинзы. Найти ширину полос интерференции, если освещение ведется светом с длиной волны  $\lambda=6100$  Å.

Ответ.

$$\Delta x = \lambda \frac{L(a-f) - af}{ad} \approx 1 \text{ мм.}$$

5.10. Определить расстояние  $x_5$  между центром картины и пятой светлой полосой в установке с зеркалами Френеля ( $\alpha=20'$ ,  $a=1$  м,  $b=10$  см) для  $\lambda=5890$  Å. Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

Ответ.

$$x_5 = \frac{5\lambda(a+b)}{2b\alpha} \approx 2,8 \text{ мм.}$$

5.11. Найти число полос интерференции в установке с зеркалами Френеля (рис. 11).

Ответ.

$$N = \frac{4ab}{a+b} \frac{a^2}{\lambda}.$$

5.12. При каком положении экрана в установке, описанной в задаче 3.1.6, интерференционные полосы исчезнут, если диаметр линзы  $D=6$  см? При каком положении экрана число интерференционных полос будет максимальным и чему равно это число?

Ответ. Интерференционные полосы исчезнут, если расстояние от экрана до билинзы  $b \geq \frac{Df}{l} = 50$  м. Число полос будет максимальным при  $b=25$  м. Максимальное число полос

$$N = \frac{D}{2\Delta x} = 60.$$

5.13. Преломляющий угол бипризмы  $\alpha=3'26''$ . Между точечным источником света ( $\lambda=5000$  Å) и бипризмой помещена линза таким образом, что ширина интерференционных полос оказалась независимой от расстояния экрана до бипризмы. Найти расстоя-

ние между соседними темными полосами, если показатель преломления стекла бипризмы  $n=1,5$ . Найти максимальное число полос  $N$ , которое может наблюдаться в этой установке, если оно получается при удалении экрана от бипризмы на  $a=5$  м.

Ответ.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0,5 \text{ мм}; \quad N = \frac{4a(n-1)^2\alpha^2}{\lambda} = 10.$$

5.14. При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, будет наблюдаться максимальное число интерференционных полос, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы составляет  $s=4$  см, и чему равно это число полос  $N$ ? При каком положении экрана интерференционные полосы исчезнут?

Ответ. Максимальное число полос  $N = \frac{s(n-1)\alpha}{\lambda} = 40$  получается при удалении экрана на  $a = \frac{s}{4(n-1)\alpha} = 20$  м от бипризмы. Полосы исчезают при удалении экрана от бипризмы на расстояние большее, чем  $2a=40$  м.

5.15. Квазимонохроматический источник имеет поперечный размер  $l$  и испускает свет с длиной волны  $\lambda$ . Оценить порядок величины телесного угла  $\Delta\Omega$ , в котором излучение источника когерентно.

Ответ.  $\Delta\Omega \approx \frac{l^2}{a^2} \approx \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ . Телесный угол когерентности не зависит от расстояния  $a$  до источника.

5.16. Каковы поперечная и продольная длины, а также телесный угол и объем когерентности излучения, испускаемого атомами натрия, находящимися в атмосфере Солнца. Наблюдается (на Земле) спектральная линия с длиной волны  $\lambda=5000$  Å, масса атома  $m=3,7 \cdot 10^{-23}$  г. Главный вклад в ширину спектральной линии дает тепловое движение атомов (температура  $T \approx 6000$  К).

Указание. Доплеровская ширина спектральной линии

$$\Delta\nu_D = \sqrt{\frac{8\pi^2 kT}{m\lambda^2}},$$

где  $k=1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана.

Ответ.

$$l_{\perp} \approx \lambda \frac{a}{l} = \frac{\lambda}{\Delta\theta} = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}; \quad l_{\parallel} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 7,1 \text{ см};$$

$$\Delta\Omega = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{-31} \text{ стер};$$

$$\Delta V \approx l_{\perp}^2 l_{\parallel} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ см}^3,$$

где разброс длин волн, вызванный тепловым движением атомов,  $\Delta\lambda=3,52 \cdot 10^{-10}$  см. (Сравни ответ с результатами задачи 3.2.4.)

5.17. Как изменятся результаты предыдущей задачи, если с Земли наблюдается звезда типа Солнца, находящаяся на расстоянии в 10 световых лет?

Ответ. Так как  $a \simeq 9,46 \cdot 10^{13}$  км, т. е. в  $6,3 \cdot 10^6$  раз больше расстояния от Земли до Солнца, то из этого следует, что  $l_{\perp} \simeq 3,4 \cdot 10^3$  см, т. е. в  $6,3 \cdot 10^6$  раз больше, чем  $l_{\perp}$  в предыдущей задаче. Что же касается  $l_{\parallel} \simeq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 7,1$  см и  $\Delta\Omega \simeq 1,3 \cdot 10^{-31}$  стер, то они сохраняют те же значения. Объем когерентности  $\Delta V \simeq 8,3 \cdot 10^7$  см<sup>3</sup> — в  $4 \cdot 10^{11}$  раз больше объема когерентности солнечного излучения на Земле. Характерно увеличение степени поперечной когерентности света по мере его распространения.

5.18. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии  $l$  между щелями могут наблюдаться за экраном интерференционные полосы? Угловой диаметр Солнца  $\Delta\theta \sim 0,01$  рад.

Указание. Считать, что Солнце излучает на длине волны  $\lambda = 5000$  Å.

Ответ.

$$l < \frac{\lambda}{\Delta\theta} = 0,05 \text{ мм.}$$

5.19. Изображение Солнца получено при помощи линзы с фокусным расстоянием  $f = 50$  мм на отверстии в экране (размер отверстия равен величине изображения). За экраном помещены две узкие параллельные щели на расстоянии  $l = 1$  мм друг от друга. При каком расстоянии  $b$  между экраном и щелями могут наблюдаться интерференционные полосы?

Ответ.

$$b > \frac{l \cdot f \cdot \Delta\theta}{\lambda} \approx 100 \text{ см.}$$

5.20. Квазимонохроматический источник света, излучающий на длине волны  $\lambda$ , характеризуется разбросом длин волн  $\Delta\lambda$ . Найти максимальный порядок интерференции, получающийся с помощью описанного источника.

Ответ.

$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

5.21. Бипризма Френеля освещается светом с длиной волны  $\lambda = 5000$  Å, исходящим из узкой щели шириной  $L$ , расположенной перпендикулярно плоскости рис. 12. Преломляющий угол призмы  $\alpha = 15'$ . Призма сделана из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . Расстояние от щели до призмы  $b = 50$  см, от призмы до экрана —  $a = 400$  см. Определить максимальную ширину щели, при которой интерференционная картина еще будет наблюдаться.

Ответ.  $L_{\max} = \frac{\lambda(a+b)}{4\alpha(n-1)} = 0,06 \text{ мм.}$

5.22. Каков должен быть диаметр светящейся нити  $D$ , освещающей установку с билинзой, изготовленной из линзы с фокусным расстоянием  $f=12$  см, чтобы получить отчетливую интерференционную картину? Половинки линзы раздвинуты на расстояние  $d=1,1$  мм. Расстояния от билинзы до нити и экрана равны:  $a=50$  см,  $L=480$  см. Длина волны используемого света  $\lambda=6100$  Å.

Ответ.

$$D \leq \frac{\lambda}{d} \left[ (a-f) - \frac{af}{L} \right] \approx 0,02 \text{ см.}$$

5.23. Пусть интерференционная схема Юнга освещается источником строго монохроматического света, т. е.

$$u(t) = u_0 e^{-i\omega t}.$$

Вычислить комплексный коэффициент частичной когерентности и показать, что формула (6) задачи 3.2.6 в этом случае переходит в формулу (6) задачи 3.1.1.

Ответ.

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau}, \quad \text{где } \tau = (s_2 - s_1)/c.$$

5.24. Вычислить автокорреляционную функцию излучения в случае, если световое возмущение представляет собой волновой пучок частоты  $\omega_0$  и длительности  $\Delta t$ , т. е.

$$u(t) = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t}, & |t| \leq \frac{\Delta t}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\Delta t}{2}. \end{cases}$$

Ответ.

$$\text{Re } \Gamma(\tau) = u_0^2 \cos \omega_0 \tau.$$

5.25. Вычислить автокорреляционную функцию излучения в случае, когда освещение ведется светом, представляющим из себя смесь двух монохроматических компонент, мало отличающихся друг от друга.

Ответ.

$$\text{Re } \Gamma(\tau) \approx I_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} \tau \cdot \cos \omega \tau,$$

где  $I_0$  — интенсивность излучения;  $\Delta\omega$  — разность частот близких монохроматических компонент.

5.26. Найти зависимость видности интерференционной картины в звездном интерферометре Майкельсона от расстояния  $l$  между отверстиями и от длины волны  $\lambda$ , если интерферометр освещается двумя далекими точечными источниками света одинаковой светосилы, находящимися на угловом расстоянии  $\alpha$  друг от друга.

Ответ.  $V = |\gamma(l)| = \cos \frac{\pi \alpha l}{\lambda}.$

5.27. Звездный интерферометр Майкельсона освещается на длине волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см двойной звездой Капелла, находящейся от нас на расстоянии 44,6 световых года. Видность интерференционной картины при увеличении расстояния между отверстиями обращается в нуль при  $l_0 = 70,8$  см. Найти расстояние между компонентами двойной звезды.

Ответ.

$$\rho = 2R = \frac{\lambda r}{2l_0} \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

5.28. На металлическое зеркало нормально падает пучок света с длиной волны  $\lambda$ . Найти усредненное по времени наблюдения распределение плотности электрической и магнитной энергии.

Ответ.

$$\begin{aligned} w_E &\sim \sin^2 \left( \frac{\omega z}{v} \right) = \sin^2 \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \right), \\ w_H &\sim \cos^2 \left( \frac{\omega z}{v} \right) = \cos^2 \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

5.29. На металлическое зеркало нормально падает пучок света с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ Å}$ , причем образуются стоячие волны. На каком расстоянии от зеркала находится пучность и первый узел электрического вектора светового поля?

Ответ. Пучность:  $\lambda/4 = 1250 \text{ Å}$ ; узел:  $\lambda/2 = 2500 \text{ Å}$ .

5.30. В опыте Винера пучности стоячих волн электрического поля вызывают почернения на прозрачной фотопластинке, расположенной под малым углом к плоскому металлическому зеркалу, освещаемому нормально падающим параллельным пучком монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 5890 \text{ Å}$ . Угол между зеркалами и фотопластинкой  $\varphi = 1^\circ 40'$ . Найти расстояние  $l$  между полосами почернения на фотопластинке.

Ответ.

$$l \approx \frac{\lambda}{2\varphi} = 0,01 \text{ мм.}$$

5.31. Темной или светлой будет в отраженном свете мыльная пленка толщиной  $h = \frac{1}{10} \lambda$ ? Пленка ( $n = 1,3$ ) находится в воздухе.

Ответ. Темной. Это следует из выражения для разности хода при нормальном падении  $(0,26 \pm 1/2)\lambda$ , что соответствует разности фаз приблизительно  $(90^\circ \pm 180^\circ)$ . При уменьшении толщины пленки разность фаз стремится к  $\pm 180^\circ$ , и интерферирующие лучи почти целиком гасят друг друга.

5.32. При каких толщинах  $h$  пленки исчезают интерференционные полосы при освещении ее светом с длиной волны  $\lambda = 6000 \text{ Å}$ ? Показатель преломления пленки  $n = 1,5$ .

Ответ.  $d < \frac{\lambda}{4n} \approx 10^{-5} \text{ см.}$

5.33. В оптических приборах потери света при прохождении через прибор происходят главным образом вследствие отражения света от поверхностей оптических деталей. Для увеличения поверхностной прозрачности стекла его поверхность покрывают тонкой пленкой, показатель преломления  $n'$  которой меньше показателя преломления  $n$  стекла. Каковы должны быть толщина пленки и ее показатель преломления, чтобы отражение от стекла было минимальным?

Ответ.  $n' = \sqrt{n}$ . Отражения не будет также в том случае, когда оптическая толщина пленки  $hn' = h\sqrt{n} = \lambda/4 + N\lambda/2$ , где  $N$  — целое число,  $\lambda$  — длина волны падающего света. (В связи с этим см. задачу 5.9 разд. III.)

5.34. Написать условия максимума и минимума полос равного наклона, наблюдаемых в фокальной плоскости объектива, помещенного в пучок лучей, прошедших сквозь плоскопараллельную пластинку.

Ответ. Условия максимума  $2nh \cos \chi = m\lambda$ , условия минимума  $2nh \cos \chi = (2m + 1)\lambda/2$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

5.35. В очень тонкой клиновидной пластинке с показателем преломления  $n = 1,5$  в отраженном свете ( $\lambda = 5800 \text{ \AA}$ ) при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними темными полосами  $\Delta x = 5 \text{ мм}$ . Найти угол  $\alpha$  между гранями пластинки.

Ответ.

$$\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} \approx 8''.$$

5.36. Найти фокусное расстояние  $f$  плоско-выпуклой линзы, примененной для получения колец Ньютона, если радиус третьего светлого кольца равен  $1,1 \text{ мм}$ ;  $n$  стекла  $= 1,6$ ;  $\lambda = 5800 \text{ \AA}$ . Кольца наблюдаются в отраженном свете.

Ответ.

$$f = \frac{r^2}{3(n-1)\lambda} = 114 \text{ см.}$$

5.37. Плоскопараллельная стеклянная пластинка лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой линзы. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете натриевой горелки ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ) найдено, что радиус темного кольца порядка  $m = 20$  (центральному темному кольцу соответствует  $m = 0$ ) равен  $x_1 = 2 \text{ мм}$ . Когда пластинка была положена на другую поверхность линзы, радиус темного кольца того же порядка сделался равным  $x_2 = 4 \text{ мм}$ . Определить фокусное расстояние линзы, если показатель преломления стекла, из которого она изготовлена,  $n = 1,5$ .

Ответ.

$$f = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \frac{1}{(n-1)m\lambda} = 54 \text{ см.}$$

5.38. Кольца Ньютона получают между двумя плоско-выпуклыми линзами, прижатыми друг к другу своими выпуклыми поверхностями. Найти радиус  $r_m$   $m$ -го темного кольца, если длина световой волны равна  $\lambda$ , а радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз равны  $R_1$  и  $R_2$ . Наблюдение ведется в отраженном свете.

Ответ.

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{1/R_1 + 1/R_2}}.$$

5.39. В фокальной плоскости объектива наблюдаются кольца равного наклона, получающиеся в интерферометре Майкельсона при разности длин плеч интерферометра  $h = 0,3 \cdot 10^{-2}$  см. Интерферометр освещается светом с длиной волны  $\lambda = 6000$  Å. Определить максимальный порядок интерференции.

Ответ.

$$m = \frac{2h}{\lambda} = 100.$$

5.40. Полосы равной толщины наблюдаются в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния  $a = 25$  см в направлении, перпендикулярном к поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно к ребру клина. Оценить максимальное число интерференционных полос  $N$ , которое может видеть глаз в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза  $d = 5$  мм.

Ответ.

$$N \approx \left(\frac{a}{d}\right)^2 = 2500.$$

5.41. В условиях задачи 3.5.1 найти интенсивность прошедшего сквозь пластинку света.

Ответ.

$$I'' = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \delta/2} I.$$

5.42. Интерферометр Фабри—Перо состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок с плоскими поверхностями (рис. 23).

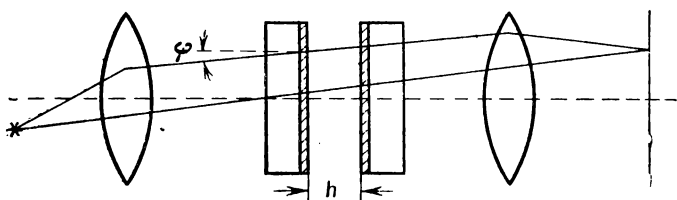


Рис. 23

Внутренние поверхности пластин, покрытые частично прозрачными пленками с высокой отражательной способностью, параллельны, и воздух, заключенный между этими поверхностями, образует плоскопараллельную пластинку. Свет на интерферометр падает почти нормально. Определить условие максимума интерференции и угловое расстояние между максимумами, если задан угол падения  $\varphi$  и расстояние между пластинами  $h$ .

*Указание.* Дополнительный сдвиг фаз, обусловленный наличием отражательных пленок, не учитывать.

Ответ.

$$2h \cos \varphi = m\lambda, \quad \delta\varphi = - \frac{\lambda}{2h \sin \varphi}.$$

5.43. Чему равен порядок спектра при работе с интерферометром Фабри—Перо в зеленой части спектра ( $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ ), если расстояние между пластинками равно 1 см? Угол падения очень мал.

Ответ.

$$m = 2h/\lambda \approx 36300.$$

5.44. Найти связь между углом выхода луча (соответствующего максимуму) из пластинки Льюмера—Герке с толщиной  $h$  и показателем преломления  $n$ .

Ответ.  $2h\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon} = m\lambda$ , где  $\varepsilon$  — угол между выходящим лучом и поверхностью пластинки.

5.45. Каково число  $p$  интерферирующих лучей в пластинке Льюмера—Герке длиной  $l = 30 \text{ см}$ , толщиной  $h = 1 \text{ см}$  и с показателем преломления  $n = 1,52$ ?

Ответ.

$$p = \frac{l\sqrt{n^2 - 1}}{2h} = 17.$$

5.46. Определить минимальный и максимальный порядки интерференции, которые могут наблюдаться с пластинкой Льюмера—Герке, описанной в задаче 5.45, для водородной линии  $H_\beta$  ( $\lambda = 4861 \text{ \AA}$ ).

Ответ.

$$\text{Минимальный порядок } m_1 = \frac{2h\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} \approx 47\,200,$$

$$\text{максимальный } m_2 = \frac{2hn}{\lambda} = 62\,400.$$

5.47. При сдвиге подвижного зеркала интерферометра Майкельсона на  $\delta = 0,00275 \text{ см}$  через поле зрения наблюдателя проходит  $N = 100$  интерференционных полос. Найти длину волны  $\lambda$  света, используемого в интерферометре.

Ответ.

$$\lambda = \frac{2\delta}{N} = 5500 \text{ \AA}.$$



5.48. При наблюдении интерференционной картины в интерферометре Жамена оказалось, что угловое расстояние между соседними максимумами  $\delta\varphi = 2^\circ 17'$ . Толщина пластин  $h$  интерферометра, выполненных из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ , равна 2,3 см; пластины образуют малый угол  $\alpha \sim 1'$ , свет падает на пластины под углом  $\varphi = 45^\circ$ . Определить длину волны света, используемого в интерферометре.

Ответ.

$$\lambda = \frac{h\alpha}{2(n^2 - 0,5)^{3/2}} \delta\varphi = 6000\text{Å}.$$

5.49. Светофильтр, стоящий на входе интерферометра Майкельсона, пропускает свет с длиной волны  $\lambda = 5500\text{Å}$ . При этом в поле зрения отчетливо наблюдается  $N = 110$  полос интерференции. Определить полосу (область) пропускания светофильтра  $\Delta\lambda$ .

Ответ.

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{N} = 100\text{Å}.$$

5.50. Найти длину волны  $\lambda$  монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы  $x = 0,05$  см. Данные, установки (рис. 10):  $a = 5$  м,  $l = 0,5$  см.

Ответ.

$$\lambda = \frac{x l}{a} = 5000\text{Å}.$$

5.51. При наблюдении колец Ньютона в отраженном синем свете ( $\lambda = 4500\text{Å}$ ) с помощью плоско-выпуклой линзы, положенной на плоскую пластинку, радиус третьего светлого кольца оказался равным 1,06 мм. После замены синего светофильтра на красный был измерен радиус пятого светлого кольца, оказавшийся равным 1,77 мм. Найти радиус кривизны  $R$  линзы и длину волны  $\lambda$  красного света.

Ответ.

$$R = \frac{2r_3^2}{5\lambda_1} = 1\text{ м}; \quad \lambda_2 = \frac{5}{9} \left( \frac{r_5}{r_3} \right)^2 \lambda_1 = 7000\text{Å}.$$

5.52. Найти разность длин волн  $D$ -линий Na, если известно, что резкость интерференционной картины, наблюдаемой в интерферометре Майкельсона, минимальна у 490-й, 1470-й и т. д., а максимальна у 1-й, 980-й и т. д. полос. Средняя длина волны  $D$ -линий  $\lambda_{\text{ср}} \simeq 5893\text{Å}$ .

Ответ.

$$\Delta\lambda = 6\text{Å}.$$

5.53. На пути луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной  $l = 2$  см, заполненная воздухом. При заполнении трубки хлором наблюдается смещение интерференционной

картины на  $N=20$  полос. Наблюдения проводятся со светом линии  $D$  натрия ( $\lambda=5890 \text{ \AA}$ ). Принимая показатель преломления воздуха  $N=1,000276$ , вычислить показатель преломления хлора.

Ответ.

$$n_{\text{Cl}} = n + N \frac{\lambda}{e} = 1,000\,865.$$

5.54. В интерферометре Майкельсона наблюдается интерференционная картина в белом свете лампочки накаливания. При помещении в одно из плеч интерферометра стеклянной пластинки толщиной  $h=0,50 \text{ см}$  интерференционная картина исчезла. Для восстановления интерференционной картины пришлось увеличить длину второго плеча интерферометра на величину  $\delta=0,255 \text{ см}$ . Найти показатель преломления стеклянной пластинки.

Ответ.

$$n = 1 + \frac{\delta}{h} = 1,51.$$

## Раздел V

# ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

### 1. Теоретический материал

Явление дифракции света. Геометрическая оптика как предельный случай при  $\lambda \rightarrow 0$ . Роль дифракционных явлений при формировании изображения в оптических и спектральных приборах. Основы скалярной теории дифракции. Принцип Гюйгенса—Френеля. Теория Кирхгофа. Волновое возмущение. Интеграл Кирхгофа. Граничные условия Кирхгофа. Граничные условия Релея—Зоммерфельда для плоской границы раздела. Интеграл Кирхгофа—Френеля. Приближение Френеля. Приближение Фраунгофера. Волновое возмущение в ближней и дальней зонах. Интеграл Кирхгофа — интеграл суперпозиции.

Дифракция Френеля на круглом отверстии (диске), на краю экрана, на щели. Спираль Корню. Зоны Френеля. Зонная пластинка. Фазовая зонная пластинка. Линза.

Дифракционная картина в дальнем поле (дифракция Фраунгофера). Интеграл Кирхгофа в приближении Фраунгофера. Волновое возмущение как суперпозиция плоских волн. Функция пропускания предмета  $t(x, y)$ . Условие соответствия углового спектра дифрагированных волн и спектра Фурье функции  $t(x, y)$ .

Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии, щели. Дифракция на одномерной амплитудной решетке. Распределение интенсивности в дифракционной картине от одной, двух и  $N$  щелей. Дифракция на дополнительных экранах. Теорема Бабине. Распределение интенсивности как результат интерференции когерентных волн.

Дифракция света на многомерной структуре. Уравнения Лауэ. Уравнение Брегга—Вульфа.

Дифракция на фазовых структурах. Отражательные дифракционные решетки. Эшелон Майкельсона.

### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Сформулируйте условия, при которых можно пользоваться законами геометрической оптики.

2.2. Как согласовать явление дифракции с прямолинейным распространением света?

2.3. Сформулируйте принцип Гюйгенса—Френеля.

2.4. Чем обусловлена возможность применения скалярной теории Кирхгофа к расчету волнового поля электромагнитной волны?

2.5. Каков физический смысл условия применимости теории Кирхгофа  $d \gg \lambda$ ?

2.6. Примените скалярную теорию дифракции для расчета волнового возмущения в свободно распространяющейся волне. Обсудите результат.

2.7. Применяя принцип Гюйгенса—Френеля для случая падения плоской волны на границу раздела двух однородных изотропных сред, получите закон отражения и преломления света.

2.8. Условие того, чтобы френелева дифракция на отверстии практически совпадала с фраунгоферовой, заключается, очевидно, в том, что максимальная разность фаз лучей, идущих от разных точек отверстия к экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, мала по сравнению с  $\pi$ . Выразить это условие через размеры отверстия  $d$ , длину волны  $\lambda$  и расстояние  $L$  от экрана до места наблюдения.

2.9. Экран с двумя щелями, разделенными расстоянием 0,1 мм, освещен красным светом. Для какого расстояния от экрана справедливо приближение дальнего поля? Решите ту же задачу, если вместо щелей взять две трехсантиметровые радиоантенны, расстояние между которыми  $l = 10$  см.

2.10. Пучок рентгеновских лучей испытывает дифракционное рассеяние на кристалле. На каком расстоянии от кристалла надо поставить экран, чтобы можно было пользоваться приближением дальнего поля?

2.11. На отверстие диаметром  $d$  падает плоская волна с длиной волны  $\lambda$ . Как будет меняться интенсивность света на оси отверстия на некотором расстоянии  $z$  при изменении диаметра отверстия?

2.12. Какова интенсивность света в центре дифракционной картины от круглого экрана, если он закрывает всю первую зону? Интенсивность света в отсутствие экрана  $I_0$ .

2.13. Какова интенсивность света в фокусе зонной пластинки, если закрыть все зоны, кроме первой? Интенсивность света без пластинки  $I_0$ .

2.14. Сравните интенсивности света в фокусах нулевого и первого порядков для зонной пластинки.

2.15. Квадратная проволочная сетка освещается нормально падающим пучком света, выходящим из коллиматора. Входное отверстие коллиматора — узкая вертикальная щель. Какая картина будет наблюдаться на удаленном экране? Что произойдет, если щель повернуть на  $90^\circ$  относительно оси коллиматора? Как будет изменяться картина, если щель расширять?

2.16. Опишите волновое поле дифрагированных волн после прохождения нормально падающей плоской волны через щель шириной  $b$ .

2.17. Напишите выражение для спектра Фурье пространственных частот для щели шириной  $b$ . Сопоставьте результаты задач 2.16 и 2.17.

2.18. Запишите соотношение между пространственными частотами  $\omega_x$  и  $\omega_y$  функции пропускания предмета  $t(x, y)$  и направлением распространения дифрагированных плоских волн.

2.19. Опишите характер распределения интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера при дифракции плоской волны на амплитудной решетке. Рассмотрите случай, когда постоянная  $d$  равна: 1) удвоенной, 2) утроенной, 3) учетверенной ширине щели  $b$ .

2.20. Сравните относительную интенсивность главных дифракционных максимумов для амплитудной решетки.

2.21. Для света, прошедшего через решетку из  $N$  щелей, интенсивность главных максимумов в  $N^2$  раз больше, чем от одной щели. Как согласовать этот факт с тем, что общий поток света, прошедшего через решетку, возрос всего в  $N$  раз?

2.22. Решетка из  $N$  щелей ( $N \rightarrow \infty$ ) освещается нормально падающей плоской волной. Функция пропускания решетки имеет вид  $t(x, y) = t(x) = t_0 \cos\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$ . Опишите поле дифрагированных волн.

2.23. В предыдущей задаче пропускание решетки по амплитуде имеет вид  $t(x) = t_0 + t_1 \cos\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$ . Что изменилось в дифракционной картине?

2.24. Решетка задачи 2.23 освещается волной, волновой вектор  $\vec{k}$  которой составляет угол  $\varphi_0$  с нормалью и лежит в плоскости  $(x, z)$ . Опишите поле дифрагированных волн в этом случае.

2.25. Щели  $b$  одномерной решетки совсем прозрачны, а промежутки  $a$  имеют коэффициент пропускания  $\alpha$ . Толщина решетки  $\ll \lambda$ . Как будут меняться углы дифракции и интенсивности дифракционных максимумов при  $\alpha \rightarrow 1$ ?

2.26. Пучок рентгеновских лучей падает под углом  $\varphi_0$  на монокристалл NaCl, постоянная решетки которого  $d_0$ . При каких условиях будут наблюдаться дифракционные максимумы?

### 3. Основные типы задач и решения

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1 (1-й тип). Расчет распределения интенсивности в дифракционной картине Френеля.

Методы решения. 1. Воспользоваться методом зон Френеля. 2. Воспользоваться интегралом Кирхгофа в приближении Френеля.

3.2. (2-й тип). Выбор геометрии для снятия диаграмм направленности.

Методы решения. 1. Воспользоваться методом зон Френеля. 2. Воспользоваться условием применимости приближения Фраунгофера.

3.3. (3-й тип). Расчет распределения интенсивности дифрагированных волн от амплитудной дифракционной решетки.

Методы решения. 1. Рассчитать распределение интенсивности как результат интерференционного усиления когерентных волн. 2. Воспользоваться интегралом Жирхгофа в приближении Фраунгофера и представить угловой спектр дифрагированных волн через спектральную плотность фурье-компонент функции пропускания решетки.

3.4. (4-й тип). Расчет распределения интенсивности света при дифракции на дополнительных экранах.

Методы расчета. 1. Непосредственный подсчет распределения интенсивности. 2. Воспользоваться теоремой Бабинне.

3.5. (5-й тип). Расчет волнового возмущения от фазовых решеток.

Метод решения. Рассмотреть волновое возмущение как сумму комплексных амплитуд дифрагированных волн.

3.6. (6-й тип). Дифракция частично когерентного света.

Метод решения. Воспользоваться корреляционной функцией  $\Gamma_{12}(0)$  для расчета зон пространственной когерентности.

## 6) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Отверстие радиуса  $\rho_0$  освещается нормально падающей плоской волной амплитуды  $A_0$  длиной  $\lambda$ . Исследовать распределение интенсивности света вдоль оси отверстия.

Решение. 1. Воспользуемся методом зон Френеля (рис. 24). В точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $b$  от отверстия, амплитуда колебаний будет определяться числом зон Френеля  $N$ , открываемых отверстием. Разность хода лучей, приходящих в точку  $P$  от центра и края отверстия  $\Delta = \rho_0^2 / 2b = N\lambda/2$ , откуда  $N = \rho_0^2 / \lambda b$ .  $A_0$  — амплитуда волны при свободном распространении света, когда  $N \rightarrow \infty$ . В этом случае действие волнового фронта определяется вектором  $\vec{OB}$ , длина которого стремится к  $\vec{OA}/2$  при  $N \rightarrow \infty$  (рис. 25, а). Вектор  $\vec{OA}$  определяет амплитуду в точке  $P$ , когда отверстие открывает одну зону Френеля, т. е.  $b = \rho_0^2 / \lambda$ ;  $OA = A_1 = 2A_0$ . При увеличении числа открытых зон будут наблюдаться непрерывные переходы от максимума к минимуму (при

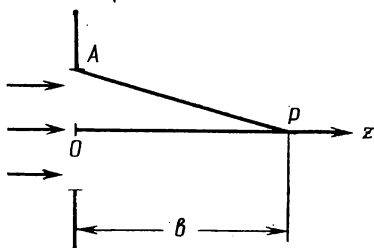


Рис. 24

$N=2$   $A_2=0$ ). Если точка  $P$  находится на расстоянии  $b > \rho_0^2/\lambda$ , то амплитуда монотонно будет уменьшаться до значения  $A=0$ . В точке  $P$ , такой, что  $\rho_0^2/2b = \lambda/4$ , когда отверстие открывает половину зоны Френеля, амплитуда будет определяться вектором  $\vec{OC}$ .  $|\vec{OC}| = A_0 \sqrt{2}$ .

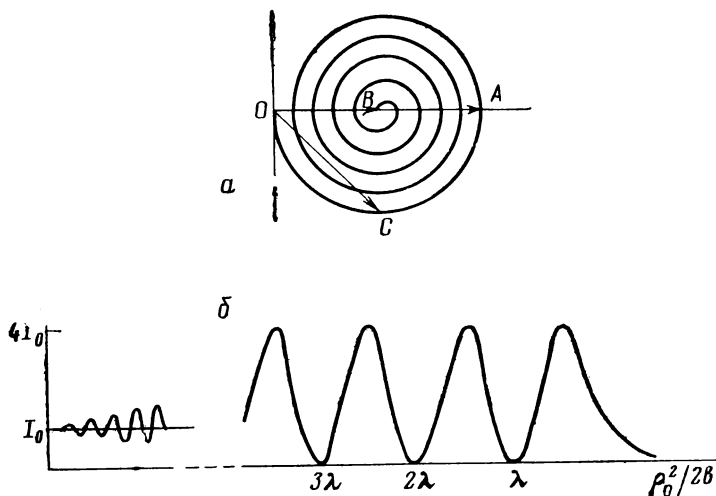


Рис. 25, а, б

Таким образом, характер распределения интенсивности вдоль оси отверстия имеет вид (рис. 25,б).

2. Рассчитаем распределение интенсивности на оси отверстия, пользуясь приближением Френеля и полагая  $\cos(n, r) = 1$ . В этом приближении интеграл Кирхгофа имеет вид

$$V_p = \frac{A_0}{i\lambda b} e^{ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2b}} \iint_S e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2b}} e^{-ik \frac{xx_0 + yy_0}{b}} dx dy.$$

В точках на оси отверстия  $x_0 = y_0 = 0$  волновое возмущение

$$V(0, 0) = \frac{A_0}{i\lambda b} \iint_p e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2b}} dx dy$$

представляет суперпозицию сферических волн (в параксиальном приближении).

Перейдем к полярным координатам ( $x^2 + y^2 = \rho^2$ ;  $dS = dx dy = \rho d\rho d\alpha$ ):

$$V(0, 0) = \frac{A_0}{i} \frac{k}{2b} \int_0^{\rho_0^2} e^{ik \frac{\rho^2}{2b}} d(\rho^2) = \frac{A_0}{i} \left( e^{ik \frac{\rho_0^2}{2b}} - 1 \right) =$$

$$= 2A_0 e^{ik \frac{\rho_0^2}{4b}} \sin\left(\frac{k\rho_0^2}{4b}\right); \quad I(0, 0) = 4A_0^2 \sin^2\left(k \frac{\rho_0^2}{4b}\right).$$

Таким образом, по оси отверстия интенсивность осциллирует от  $I_{\max} = 4A_0^2 = 4I_0$  до нуля, проходя через нуль при  $k\rho_0^2/4b = m\pi$ , т. е. при  $\rho_0^2/2b = m\lambda$ , когда на отверстии укладывается четное число зон Френеля. При  $k\rho_0^2/4b = \pi/2$  интенсивность имеет максимальное значение, равное  $4I_0$  (при этом отверстие открывает одну зону Френеля). При  $b > \rho_0^2/\lambda$  интенсивность монотонно спадает как  $\sin^2\left(\frac{\pi\rho_0^2}{2b\lambda}\right)$ , стремясь к нулю.

При этих условиях

$$I = I_0 \left(\frac{\pi\rho_0^2}{2b\lambda}\right)^2 = I_0 \pi \rho_0^2 \left(\frac{V \pi \rho_0}{2b\lambda}\right)^2 = I_0 \pi \rho_0^2 \left(\frac{4b^2 \lambda^2}{\pi \rho_0^2}\right)^{-1}.$$

Первый множитель представляет собой энергию, падающую на отверстие, а второй приблизительно равен площади, через которую она проходит, когда точка наблюдения находится на большом расстоянии  $b$  от отверстия (приближение дальней зоны). Предположение  $\cos(n, r) \approx 1$  справедливо при малом числе зон Френеля, открываемых отверстием, т. е. точка  $P$  должна находиться достаточно далеко от отверстия.

Считая допустимым отклонение  $\cos(\bar{n}, \bar{r})$  от единицы не более 10%, оценим это расстояние:

$$\cos(\bar{n}, \bar{r}) = \cos \alpha = \frac{b}{b + \Delta} = \frac{1}{1 + \Delta/b} = \frac{1}{1 + \rho_0^2/2b^2},$$

откуда  $b$  должно быть больше  $3\rho_0/\sqrt{2} \approx 1,5\rho_0$ . При этом на отверстии будет укладываться

$$N = \frac{\rho_0^2}{b\lambda} \approx \frac{\rho_0}{1,5\lambda} \text{ зон.}$$

При  $\rho_0 = 1 \text{ мм}$ ,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$

$$N = \frac{1}{1,5 \cdot 5} 10^4 \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ зон.}$$

При меньших значениях  $b$  наше приближение неверно. Амплитуда волны начинает уменьшаться из-за влияния  $\cos(n, r)$  и при  $N \rightarrow \infty$  будет стремиться к  $A_0$ .

**3.1.2.** Плоская зонная пластинка изготовлена так, что открыты все четные зоны, нечетные закрыты ( $m = 2n$ , где  $m$  — полное число зон,  $n$  — число открытых зон). Найти точки на оси пластинки, в которых получится изображение источника, помещенного на оси на расстоянии  $a$  от пластинки.

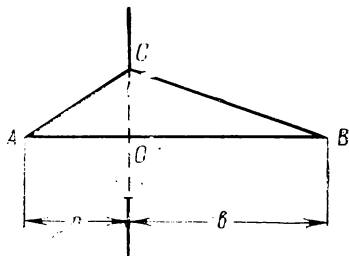


Рис. 26



Решение. Пусть  $\rho_0$ —радиус зонной пластинки,  $n$ —последняя открытая зона на пластинке. Разность хода лучей, приходящих в точку  $B$  (рис. 26) по пути  $ACB$  и  $AOB$ ,

$$\Delta = S_n - S_0 = \left[ (a+b) + \frac{\rho_0^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] - (a+b) = \frac{\rho_0^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

$$\Delta = m\lambda/2 = n\lambda,$$

$$\frac{\rho_0^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = n\lambda = m\lambda/2; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{\rho_0^2} = \frac{1}{f}$$

( $f$  — фокус пластинки). Тогда

$$m\lambda f = \rho_0^2.$$

При этом условии на каждом кольце укладывается одна зона Френеля. Получим фокус 1-го порядка. Если на кольце укладывается 3, 5, ... зон Френеля, т. е.  $r_1^2 = (2k+1)\lambda f$  ( $k=0, 1, \dots$ ), получим фокусы 3, 5, ... порядков, интенсивность в которых в  $(1/3)^2$ ;  $(1/5)^2$ ; ... слабее  $I_1$ .

3.1.3. Линза с фокусным расстоянием  $f=50$  см диаметром  $D=5$  см фокусирует пучок света лазера ( $\lambda=6328$  Å). Сечение пучка  $D_1=2$  см. Во сколько раз интенсивность света в фокусе линзы превышает интенсивность в пучке лазера? Оценить размеры пятна в фокальной плоскости.

Решение. Решение проведем двумя методами.

1. Воспользуемся методом зон Френеля. Число зон, вырезаемых пучком, для точки  $F$ , совпадающей с фокусом линзы, равно

$$N = \frac{D^2}{4\lambda f}.$$

Линза компенсирует разность фаз для лучей, идущих по любому направлению, так что амплитуда от каждой «зоны» повышается в  $\pi$  раз. Действие всех «зон» синфазно, следовательно, амплитуда волны, вышедшей из линзы и собирающейся в фокусе  $A_F = A_0 N \pi$ ,

$$I_F = I_0 \left( \frac{D^2}{4\lambda f} \pi \right)^2,$$

$$\frac{I_F}{I_0} = \left( \frac{4 \cdot 3,14}{4 \cdot 6,328 \cdot 10^{-5} \cdot 50} \right)^2 = 10^6.$$

2. Для расчета волнового возмущения в фокусе линзы воспользуемся интегралом Кирхгофа—Френеля, полагая  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) = 1$ :

$$V(x, y) = \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2f}} \iint_{\text{по апертуре пучка}} A_0 t(x, y) e^{ik \frac{x^2+y^2}{2f}} e^{-ik \frac{xx_f + yy_f}{f}} dx dy,$$

где  $A_0 t(x, y)$  — распределение комплексных амплитуд света непосредственно после линзы и  $t(x, y) = \frac{V(x, y)}{V_0(x, y)}$  — функция пропускания тонкой линзы.

Для нахождения  $t(x, y)$  воспользуемся тем, что без учета поглощения света линза — чисто фазовый объект, т. е.

$$t(x, y) = e^{i\varphi(x, y)}.$$

В параксиальном приближении  $\varphi(x, y) = -k \frac{x^2 + y^2}{2f}$ . Действительно, если точечный источник находится в переднем фокусе линзы, т. е. на линзу падает расходящаяся волна с амплитудой

$$A = A_0 e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}},$$

то после линзы получается плоская волна. Линза компенсирует разность фаз лучей, идущих по различным направлениям (пути таутохронны), внося фазовую задержку  $\varphi(x, y)$ :

$$V_F = \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} A_0 \int \int_{\text{по апертуре}} dx dy,$$

$$I_F = I_0 \left( \frac{D_1^2 \pi}{4\lambda f} \right)^2 = I_0 \cdot 10^6,$$

т. е. тот же результат, что и ранее.

Размеры пятна  $r$  в фокальной плоскости линзы найдем из условия ограниченности сечений пучка диаметром  $D_1$ . Основная доля потока сосредоточена в пределах нулевого дифракционного максимума. Первый нуль интенсивности соответствует условию

$$D_1 \sin \varphi = 1,22\lambda, \quad \sin \varphi \cong r/\lambda = 1,22\lambda/D_1; \quad r \approx \frac{\lambda}{D_1} f = 1,5 \text{ мкм.}$$

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Параболическое зеркало имеет диаметр 1 м и используется как антенна для волн с  $\lambda = 3$  см. Оценить наименьшее расстояние, на котором следует поместить приемник для снятия диаграммы направленности.

Решение. 1. Необходимо, чтобы в точке  $P$  (рис. 27) выполнялись условия для наблюдения дифракции Фраунгофера. Для этого размер зеркала  $D/2$  должен быть  $\ll$  размеров первой зоны Френеля, равной

$$r_1 = \sqrt{\lambda \frac{ab}{a+b}} = \sqrt{\lambda \frac{b}{1+b/a}}.$$

Если источник находится в фокусе параболического зеркала ( $a = \infty$ ), то  $r_1 = \sqrt{\lambda b} \gg D/2$ , откуда  $b \gg \frac{D^2}{4\lambda} = 10 \text{ м.}$

2. Должно выполняться приближение Фраунгофера

$$k \left( \frac{D^2}{4z} \right) < \pi/2,$$

т. е.  $\frac{D^2}{\lambda} < z = b, \quad b > \frac{1}{3 \cdot 10^{-2}} = 30 \text{ м.}$

При этих условиях амплитуда света с учетом квадратичных членов в фазовом множителе будет отличаться от линейного приближения, как  $r\sqrt{2}$  отличается от  $\frac{\pi r}{2} \approx 1,57 \cdot r$ , т. е. ошибка будет не более 10%.

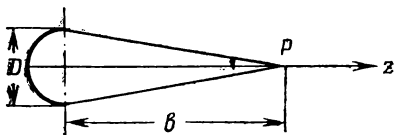


Рис. 27

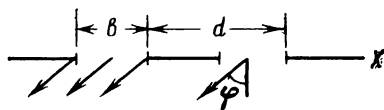


Рис. 28

### 3-й тип задач (3.3)

3.3.1. Найти распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера, если плоская волна амплитуды  $E_0$  нормально падает на амплитудную решетку с периодом  $d$  и шириной щели  $b$  (рис. 28).

Решение. Возможны два метода расчета.

1. Рассчитаем распределение интенсивности как результат интерференции когерентных волн. От  $n$ -й щели от элемента щели  $dx$  в направлении  $\varphi$  идет волна

$$E_0 dx \exp \{ i\omega t - ik[(n-1)d + x] \sin \varphi \}.$$

Вся щель посылает волну

$$E_0 \exp \{ i[\omega t - k(n-1)d \sin \varphi] \} \int_0^b \exp [-ikx \sin \varphi] dx.$$

От  $N$  щелей, являющихся когерентными излучателями, получим

$$\begin{aligned} E_\varphi &= E_0 \exp i\omega t \sum_{n=1}^N \exp [-ik(n-1)d \sin \varphi] \int_0^b \exp [-ikx \sin \varphi] dx = \\ &= E_0 b e^{i\omega t} \frac{\sin u}{u} \sum_{n=1}^N \exp [-ik(n-1)d \sin \varphi], \end{aligned}$$

где

$$u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}.$$

Обозначим  $\frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$  через  $\delta$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^N \exp[-i2\delta(n-1)] = 1 + \exp(-i2\delta) + \exp(-i4\delta) + \dots + \\ + \exp[-i2\delta(N-1)] -$$

геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = \exp(-i2\delta)$ :

$$\sum_{n=1}^N = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1-\exp[-i2\delta N]}{1-\exp[-i2\delta]};$$

$$E_{\varphi} = E_0 b \frac{\sin u}{u} \frac{1-\exp[-i2\delta N]}{1-\exp[-i2\delta]} e^{i\omega t}.$$

Интенсивность света

$$I_{\varphi} = E_{\varphi} E_{\varphi}^* = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2,$$

где

$$u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}.$$

Таким образом, за решеткой распределение интенсивности модулируется множителем  $(\sin u)/u$ , описывающим дифракционные явления от одной щели. Вторым множителем является результатом интерференции волн от  $N$  когерентных щелей. Главные максимумы, соответствующие интерференционному усилению волн, появляются в направлении, когда  $\delta = m\pi$ , т. е. при  $d \sin \varphi = m\lambda$ . Главные минимумы наблюдаются в направлениях, в которых ни одна щель света не посылает, т. е. как и от одной щели при условии  $b \sin \varphi = m\lambda$ .

2. Воспользуемся представлением волнового возмущения в виде суперпозиции плоских волн, амплитуда которых определяется преобразованием Фурье функции пропускания отверстия. Функция пропускания амплитудной решетки

$$t(x, y) = t(x) = \begin{cases} 1 - \text{для } |md - a| < |x| < (md + a), \\ 0 - \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где  $b = 2a$  — ширина прозрачного промежутка,  $d$  — период решетки,  $L = Nd$  — ширина решетки,  $N \rightarrow \infty$ . Спектральная плотность Фурье-компонент функции  $t(x)$  для пространственных частот  $\omega_x$  равна

$$G(\omega_x) = \sum_{m=0}^N \int_{md-a}^{md+a} t(x) e^{-i\omega_x x} dx = \sum_{m=0}^N \frac{e^{-im\omega_x a}}{i\omega_x} (e^{i\omega_x a} - e^{-i\omega_x a}) =$$

$$= 2b \frac{\sin\left(\frac{\omega_x b}{2}\right)}{\omega_x b} \sum_{m=0}^N e^{-im\omega_x d}.$$

Соответственно угловой спектр плоских дифрагированных волн  $V(ik_x)$  определится функцией  $G(\omega_x)$  при условии, что  $\omega_x = k_x$  (т. е.  $\omega_x = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi$ ):

$$V(ik_x) = b \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \sum_{m=0}^N e^{-im2\delta},$$

и распределение интенсивности по углам  $\varphi$  будет иметь вид

$$I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2,$$

где  $u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$  и  $\delta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$  — главные максимумы, наблюдаемые в направлении  $\sin \varphi_m = \pm m\lambda/d$ , соответствуют двум плоским дифрагированным волнам, появляющимся от каждой компоненты, на которые разлагается функция  $t(x)$  при условии

$$k_x = (\omega_x)_m = \frac{2\pi}{d} m.$$

Так как  $t(x)$  — почти-периодическая функция  $x$  ( $N$  велико), то волновое поле представляет собой набор узких волновых пакетов, угловая ширина которых  $\delta\varphi = \lambda/Nd \rightarrow 0$  по мере увеличения  $N$ , а амплитуды определяются спектральной плотностью  $G(\omega_x)$ .

3.3.2. Показать, что для дифракционной решетки с периодом  $d=2b$  ( $b$  — ширина щели) все четные максимумы пропадают. Считать протяженность решетки  $L \gg d$ .

Решение. 1. Воспользуемся распределением интенсивности света от дифракционной решетки. Для главного максимума

$$I_m = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 N^2 = I_0 N^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi m b}{2b}}{\frac{\pi m b}{2b}}\right)^2;$$

$$\text{для } m = 2n \ (n = 0, 1, 2, 3 \dots) \ I_m = 0;$$

$$\text{для } m = (2n + 1) \ I_m = I_0 \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2.$$

2. Каждый дифракционный максимум формируется плоской волной с волновым вектором  $k$ , таким, что  $k_{xm} = \omega_{xm}$ , где  $\omega_{xm} = \frac{2\pi}{d} m$  ( $\omega_{xm}$  — пространственные частоты функции пропускания предмета), амплитуда которой определяется преобразованием Фурье функции  $t(x)$ .

Для нашей решетки  $t(x, y) = t(x)$

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } d/2 \leq |x| \leq d/2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

Найдем коэффициенты разложения Фурье функции  $t(x)$ :

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} a_m \\ b_m \end{matrix} \right\} &= \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} t(x) \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix} \frac{2\pi}{d} mx dx, \\ a_m &= \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} \cos m\omega_x x dx = \frac{2}{d m \omega_x} \sin m\omega_x x \Big|_{-d/2}^{+d/2} = 0, \\ &\quad \left( \omega_x = \frac{2\pi}{d} \right) \\ b_m &= \begin{cases} -\frac{1}{\pi m} (\cos 2\pi m - \cos \pi m) = \frac{2}{\pi m} & \text{для } m = 2n + 1, \\ 0 & \text{для всех } m = 2n \\ & (n = 0, 1, 2 \dots). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(\omega_x) = b_1 \sin \omega_x x + b_3 \sin 3\omega_x x + \dots + b_m \sin m\omega_x x,$$

т. е. спектр Фурье функции  $t(x)$  содержит только нечетные гармоники.

Волновое поле дифрагированных волн будет содержать плоские волны, такие, что

$$k_x = \omega_x; \quad \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi = \frac{2\pi}{d} (2n + 1),$$

т. е.  $d \sin \varphi = (2n + 1)\lambda$ .

Интенсивность дифракционных максимумов определяется коэффициентами Фурье  $b_m = \frac{2}{\pi m}$  и  $I_m = \left(\frac{2}{\pi m}\right)^2 I_0$ , как и в предыдущем решении.

3.3.3. Показать, что критерий Релея для разрешающей способности дифракционной решетки с прямоугольной функцией пропускания соответствует наличию провала в результирующей интенсивности на 20%, т. е. критерию практического разрешения двух близких монохроматических линий.

Решение. Распределение интенсивности дифракционной решетки

$$I = I_1 \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2,$$

где  $I_1$  — интенсивность от одной щели решетки,

$$\delta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}.$$

Пусть в спектре падающего на решетку излучения содержится две линии  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ . Ввиду их полной некогерентности будут складываться интенсивности

$$I_{\text{рез}} = I_1 \left[ \left( \frac{\sin N\delta_1}{\sin \delta_1} \right)^2 + \left( \frac{\sin N\delta_2}{\sin \delta_2} \right)^2 \right],$$

где  $\delta_1 = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda_1}$  и  $\delta_2 = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda_2}$ .

Введем  $x = N\delta_2 - N\delta_1$ . Условию образования главного максимума  $m$ -го порядка соответствует  $N\delta = N\pi m$ . Следовательно,  $N\delta_1 = N\pi m - x$ .

Рассмотрим результирующую интенсивность посередине между двумя главными максимумами  $m$ -го порядка, т. е. при  $N\delta_1 = N\pi m - x/2$ :

$$\begin{aligned} I &= I_1 \left[ \left( \frac{\sin x/2}{\sin \frac{x}{2N}} \right)^2 + \left( \frac{\sin x/2}{\sin \frac{x}{2N}} \right)^2 \right] \Big|_{\frac{x}{2N} \rightarrow 0} = 2I_1 N^2 \left( \frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = \\ &= 2I_1 N^2 \left( \sin^2 \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$I = \begin{cases} 0 & \text{при } x/2 = \pi, \\ 2I_m & \text{при } x = 0, \\ I_m \cdot 16/\pi^2 = I_m \cdot 1,62 & \text{при } x/2 = \pi/4, \\ I_m \cdot 8/\pi^2 = I_m \cdot 0,81 & \text{при } x/2 = \pi/2. \end{cases}$$

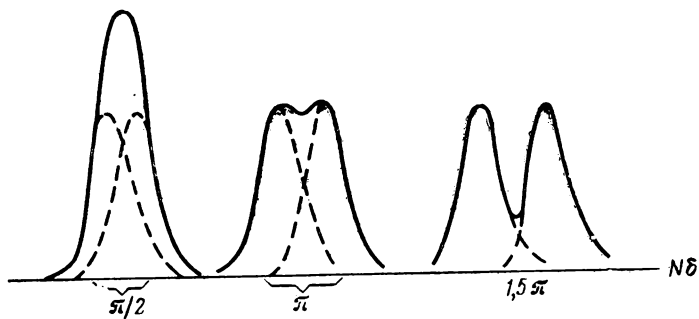


Рис. 29

Рассмотрим последний случай ( $x = \pi$ ), когда  $I = 0,81I_m$ . Разрешающая способность

$$R = \lambda/\Delta\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

но  $\delta \sim \frac{1}{\lambda}$  и  $R = \frac{1/\delta}{1/\delta_1 - 1/\delta_2} = \frac{\delta}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{x}{N} = \frac{\pi}{N} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \delta,$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\pi}{N\delta} = \frac{\pi}{N\pi m} = \frac{1}{Nm},$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN.$$

Таким образом, условие разрешения Релея соответствует случаю  $x=\pi$ , и провал в кривой распределения результирующей линии составляет  $\sim 20\%$  (рис. 29).

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Показать, что распределение интенсивности дифрагированного света в картине Фраунгофера одинаково для двух дополнительных решеток.

**Решение.** Пусть  $d$  — период решетки. Линейные размеры  $L = Nd \gg d$ . Обозначим  $b/d$  через  $q$ . Для дополнительной решетки период тот же, по  $b'/d = 1 - q$ .

**1 способ.** Воспользуемся распределением интенсивности в дифракционной картине от решетки 1:

$$I_\varphi = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2.$$

При большом числе щелей вся интенсивность в основном сосредоточена в главных максимумах:

$$I_m \cong d^2 \sin^2(\pi m q) \left( \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2.$$

Последний множитель зависит только от  $d$ ,  $q$  входит только под знаком  $\sin : \sin^2(\pi m q)$ .

Для решетки 2  $q$  нужно заменить на  $(1 - q)$ :

$$\sin^2[m\pi(1 - q)] = \sin^2(m\pi - m\pi q) = \sin^2(\pi m q),$$

т. е. интенсивность в дифракционных максимумах одинакова.

**2 способ.** Воспользуемся теоремой Бабинне. На основании теории Кирхгофа (рис. 30)

$$V_{1p} \sim \int_{\sigma_1} V \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma; \quad V_{2p} \sim \int_{\sigma_2} V \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma,$$

**2 способ.** Воспользуемся теоремой Бабинне. На основании теории волнового поля, которое было бы при свободном распространении света.

$G$  — функция Грина, одинаковая в обоих случаях.

$$V_1 + V_2 = V.$$



Но  $V$  в дифракции Фраунгофера равно нулю всюду, кроме фокуса линзы, с помощью которой наблюдают дифракционную картину. Следовательно,  $V_1 + V_2 = 0$  и  $I_1 = I_2$ , т. е. распределения интенсивностей дифрагированного света от двух дополнительных экранов совпадают.

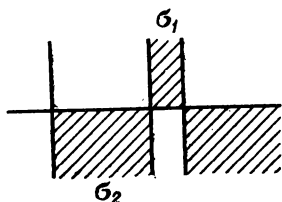


Рис. 30

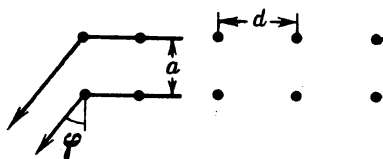


Рис. 31

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Две решетки из  $N$  синфазных вибраторов каждая сдвинуты друг относительно друга на расстояние  $a$  (рис. 31). Как будет меняться диаграмма направленности системы таких решеток в зависимости от изменения расстояния  $a$  между ними? Рассмотреть случаи:  $a = \lambda/2$ ;  $a = \lambda$ ;  $a = 3/2 \cdot \lambda$ ;  $a = 2\lambda$ .

Решение. Складывая амплитуды от  $N$  синфазных излучателей, получим

$$A = A_0 (1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + e^{i3\delta} + \dots + e^{iN\delta}),$$

$$A_1 = A_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi N d \sin \varphi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}} \right), \quad \delta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda},$$

где  $d$  — расстояние между вибраторами. Излучение от второй решетки вибраторов имеет ту же амплитуду, но сдвинуто по фазе, так что

$$A_2 = A_1 e^{i\alpha},$$

где  $\alpha$  — фазовый сдвиг между волнами, идущими в направлении  $\varphi$  от первой и второй решеток. Результирующее возмущение

$$A = A_1 + A_2 = A_1 (1 + e^{i\alpha}),$$

$$I = A_1^2 (1 + e^{i\alpha}) (1 + e^{-i\alpha}) = 4A_1^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Фазовый сдвиг  $\alpha$  найдем как

$$\alpha = ka \cos \varphi,$$

откуда

$$I_1 = 4I_1 \cos^2 \left( \frac{\pi a \cos \varphi}{\lambda} \right).$$

Таким образом, максимумы останутся на тех же местах, что и от одной решетки, но их интенсивность модулируется функцией

$$\cos^2(\pi a \cos \varphi / \lambda) = \cos^2 \alpha / 2:$$

- 1)  $a = \lambda/2$ ; при  $\varphi = 0$   $\cos \alpha/2 = 0$ , т. е. нулевой максимум исчезнет;
- 2)  $a = \lambda$ ; при  $\varphi = 0$   $\cos \alpha/2 = 1$  и интенсивность нулевого максимума увеличится в четыре раза;
- 3)  $a = 3/2\lambda$  аналогично (1);
- 4)  $a = 2\lambda$  аналогично (2).

Таким образом, фазовая модуляция позволяет управлять распределением интенсивности дифрагированных волн. Это обстоятельство используется в фазовых дифракционных решетках.

**3.5.2. Прозрачная периодическая структура,** профиль которой изображен на рис. 32, освещается сверху нормально падающей плоской монохроматической волной. При заданном показателе преломления  $n$  подобрать  $h$  так, чтобы главные максимумы 1-го порядка были максимально интенсивны. Чему равна интенсивность нулевого максимума  $I_0$ ?

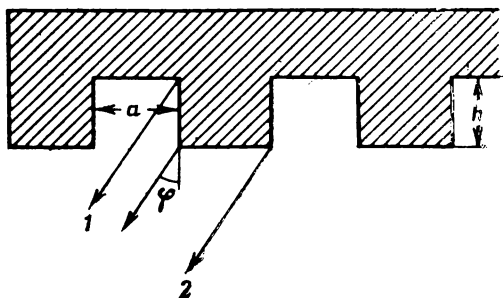


Рис. 32

Решение. В направлении  $\varphi$  распространяются две системы волн от полос шириной  $a = d/2$ , сдвинутые по фазе на  $\alpha$ . Результирующее распределение интенсивности (см. задачу 3.5.1):

$$I = 4I_1 \cos^2 \alpha / 2.$$

Максимум 1-го порядка соответствует  $d \sin \varphi = \lambda$  или  $\sin \varphi = \lambda/2a$  ( $d = 2a$ ). Для расчета  $\alpha$  подсчитаем разность хода лучей 1 и 2:

$$\Delta = h(n - \cos \varphi) + a \sin \varphi \cong h(n - 1) + a \sin \varphi.$$

Для  $\varphi$ , соответствующего 1-му максимуму,

$$\alpha = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} [h(n - 1) + a \sin \varphi] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ h(n - 1) + \frac{\lambda}{2} \right].$$

Так как максимум 1-го порядка имеет максимальную интенсивность, то  $\alpha/2 = \pi$ , т. е.  $h = \frac{\lambda}{2(n - 1)}$ . При этом для нулевого максимума

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} h(n - 1) = \pi \quad \text{и} \quad I_0 = 0.$$

Так как  $d = 2a$ , то все максимумы четных порядков тоже пропадают.

## 6-й тип задач (3.6)

3.6.1. В интерференционном опыте Юнга наблюдается интерференционная картина в области перекрытия пучков, дифрагировавших на двух щелях, расположенных на расстоянии  $D$  друг от друга в точках с координатами  $(0, 0)$  и  $(x_0, y_0)$ . Источник света протяженный; находится на расстоянии  $L \gg D$  от щелей, свет достаточно монохроматичен, так что для каждого из независимых излучателей выполняются условия временной когерентности (рис. 33).

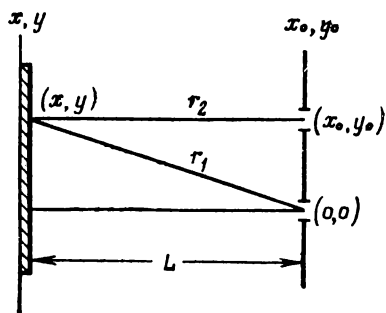


Рис. 33

Рассчитать степень пространственной когерентности для двух случаев: 1) источник — светящаяся лента шириной  $2b$ , 2) в качестве источника используются два линейных излучателя с

однородной интенсивностью, расположенных в точках  $(+x)$  и  $(-x)$ , так что  $|2x| = l$ .

Решение. Для расчета степени пространственной когерентности воспользуемся тем обстоятельством, что свет достаточно монохроматичен и наблюдение картины Юнга производится обычно в низких порядках интерференции вблизи нулевой полосы. В этом случае видность картины будет определяться коэффициентом когерентности  $\Gamma_{12}(0)$ , что значительно упрощает задачу. Кроме того, учтем условие  $L \gg D$ , которое позволяет при подсчете разности хода лучей, приходящих в точки 1  $(0, 0)$  и 2  $(x_0, y_0)$ , учитывать только линейное приближение. При этих предположениях  $\Gamma_{12}(0)$  вычисляется, как в задаче 3.2.9 гл. IV (с. 71). Комплексная степень когерентности  $\gamma_{12}(0)$  имеет вид:

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\iint_s I(x, y) e^{-ik \left( \frac{xx_0 + yy_0}{L} \right)} dx dy}{\iint_s I(x, y) dx dy}$$

(теорема Ван-Цитертта-Цернике). Таким образом,  $\gamma_{12}(0)$  определяется таким же интегралом суперпозиции, что и распределение комплексных амплитуд в волновом поле дифрагированной волны в дальней волновой зоне, если вместо распределения амплитуд в дифракционном отверстии подставить распределение интенсивности  $I(x, y)$  по источнику света. Это и понятно, так как и в том и в другом случаях результат определяется статистическим усреднением фаз.

Формулу (1) можно рассматривать как преобразование Фурье распределения интенсивности  $I(x, y)$  излучателя по пространственным частотам

$$\omega_x = k \frac{x_0}{L} = k_x, \quad \omega_y = k \frac{y_0}{L} = k_y,$$

что позволяет достаточно просто представить расположение зон пространственной когерентности для данного излучателя.

В случае 1, когда источник выполнен в виде однородно освещенной щели шириной  $2b$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= \frac{I_0 \int_{-b}^b e^{-ik \frac{x x_0}{L}} dx}{I_0 2b} = \frac{1}{2b} \frac{1}{ikx_0} \left( e^{-ik \frac{x_0}{L} b} - e^{ik \frac{x_0}{L} b} \right) = \\ &= \frac{L}{bkx_0} \sin \frac{kx_0 b}{L} = \operatorname{sinc} \left( \frac{kbx_0}{L} \right) = \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi x_0 \alpha}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{2b}{L}$  — апертура осветителя.

Степень когерентности освещения щелей, находящихся в точках (0) и  $(x_0)$ , падает до нуля при

$$\frac{\pi x_0}{\lambda} \alpha = \pi,$$

т. е. при  $x_0 = D = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2b} L$ .

Щели освещены когерентно ( $\gamma \cong 1$ ) при

$$\frac{\pi x_0}{\lambda} \alpha \leq 0,1 \pi, \quad \text{т. е. при } D \leq \frac{0,1\lambda}{\alpha} = 0,1\lambda \frac{L}{2b}.$$

В случае 2, когда источник выполнен в виде двух линейных излучателей, расположенных в точках  $x = l/2$  и  $x = -l/2$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= \frac{1}{2} \left( e^{-ik \frac{x_0}{L} \frac{l}{2}} + e^{ik \frac{l}{2} \frac{x_0}{L}} \right) = \\ &= \cos \left( k \frac{x_0}{L} \frac{l}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi l x_0}{\lambda L} \right) = \cos \left( \pi \frac{x_0}{\lambda} \alpha \right). \end{aligned}$$

В этом случае видность интерференционной картины будет достигать единицы, если  $x_0 = \frac{\lambda L}{l} m$  и будет впервые равна нулю при  $x_0 = \frac{\lambda L}{2l}$ .

Пространственное расположение зон когерентности определяется тем же выражением, что и направление плоских дифрагированных волн на отверстиях, совпадающих с рассматриваемыми излучателями. Для дифракции плоской волны на двух щелях

максимумы интенсивности дифрагированных волн наблюдаются в направлениях

$$\sin \varphi \cong \varphi = \frac{\lambda}{d} m.$$

В нашем случае зоны когерентности соответствуют

$$x_0 = L\varphi = \frac{\lambda m}{l} L,$$

т. е. тем же углам

$$\varphi = \frac{m\lambda}{d}.$$

\* \* \*

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Решетка с прозрачными щелями, периодом  $d = 1,5 \cdot 10^{-4}$  см освещается монохроматическим светом  $\lambda = 6000$  Å при разных углах падения  $\theta_0$ . Представьте на графике угловые направления главного дифракционного максимума 1-го порядка как функцию угла  $\theta_0$ .

4.2. Расстояние между смежными щелями «трехщелевой решетки» равно  $d$ . Станет полуширина дифракционного максимума больше или меньше, если среднюю щель закрыть?

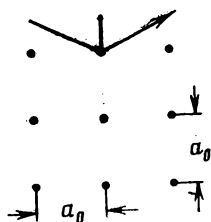


Рис. 34

4.3. Падающий на кристалл пучок рентгеновских лучей не монохроматичен, а содержит волны в диапазоне 0,95—1,30 Å. Возникнут ли дифрагированные пучки, связанные с изображенными на (рис. 34) плоскостями?  $a_0 = 2,75$  Å.

4.4. Дифракция Фраунгофера наблюдается на круглых дополнительных экранах диаметром  $D$ . Нарисуйте вид дифракционной картины в первом и втором случаях.

4.5. Для наблюдения дифракционной картины Фраунгофера от щели шириной  $b$  используется зрительная труба, дающая  $30\times$  увеличение. При какой максимальной ширине щели наблюдатель отчетливо увидит дифракционную картину? Угловое разрешение для глаза принять  $\Delta\varphi = 2'$ ,  $\lambda = 5000$  Å.

4.6. Какова может быть предельная степень расходимости освещающего пучка для наблюдения дифракционной картины в условиях задачи 4.5?

4.7. Юнговские щели шириной 0,1 мм освещаются пучком лучей (длина волны  $\lambda$ ), прошедшим через дифракционную решетку периодом  $d$ . Расстояние между щелями и решеткой  $L$ . Где надо поместить щели, чтобы наблюдать от них отчетливую дифракционную картину?

4.8. При каких условиях можно наблюдать зеркальное отражение от шероховатой поверхности при малых и больших углах падения?

4.9.  $N$  синфазных вибраторов освещается плоской волной, угол падения которой меняется от нуля до  $\pi/2$ . Расстояние между вибраторами  $d$ . Как будет распространяться свет, если  $d < \lambda$ ?

4.10. Рассмотрите дифракцию света на краю плоского экрана и на щели. Проследите изменение дифракционной картины при различных значениях волнового параметра  $\sqrt{z} \cdot \lambda/d$ .

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Мощность излучения лазера в импульсе составляет 500 Мвт в луче с поперечным сечением около  $1 \text{ см}^2$ . Пусть луч сфокусирован идеальной линзой с фокусным расстоянием  $f=5 \text{ см}$ . Оценить напряженность электрического поля и давление света в фокусе такой линзы ( $\lambda=6943 \text{ Å}$ ).

Ответ.

$$E_{ef} \approx 3,6 \cdot 10^9 \text{ В/см}; \quad p \approx 1 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

5.2. Лазерный пучок (диаметр  $1 \text{ см}$ ), расходимость которого определяется дифракцией, направлен на Луну. Каков диаметр освещенной на Луне поверхности?  $\lambda=6328 \text{ Å}$ , расстояние от Земли до Луны  $L=384000 \text{ км}$ . Рассеянием в атмосфере пренебречь.

Ответ.  $D \approx 230 \text{ м}$ .

5.3. Реальный «линейный» источник видимого света имеет ширину  $1 \text{ мм}$ . Как далеко от экрана с двумя щелями (расстояние между щелями  $0,5 \text{ мм}$ ) его нужно поместить, чтобы щели можно было считать когерентными источниками?  $\lambda=5000 \text{ Å}$ .

Ответ.

$$L > 2b \frac{D}{\lambda} = 2 \text{ м.}$$

5.4. Рассчитать форму поверхности идеальной плоско-выпуклой линзы.

Ответ. Гиперболоид вращения с вершиной в точке  $O$  и радиусом при вершине  $R=(n-1)f$  (рис. 35).

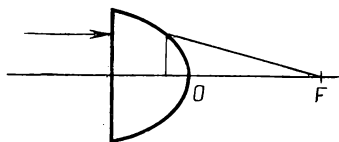


Рис. 35

5.5. Дифракция света на ультразвуковой волне в толуоле наблюдается в фокальной плоскости линзы ( $f=3 \text{ см}$ ). В качестве источника света используется зеленая линия ртути ( $\lambda=5461 \text{ Å}$ ). Определить скорость звука  $v$  в толуоле, если расстояние между соседними максимумами  $\Delta x=0,546 \text{ см}$ , а частота ультразвуковых колебаний  $\nu=4000 \text{ Кгц}$ .

Ответ.  $v=1200 \text{ м/с}$ .

5.6. На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии  $a$  от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет светлым, а при каких темным?

Ответ.

$$r = \sqrt{m\lambda \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{f} \right)} \quad \text{при } a < f \quad \text{и} \quad r = \sqrt{m\lambda \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right)} \quad \text{при } a > f.$$

Центр темный, если  $m$  — четное.

5.7. Требуется изготовить зонную пластинку на сферическом зеркале. Чему равен радиус  $m$ -зоны, если радиус зеркала  $R$  и источник расположен на оси зеркала на расстоянии  $a$  от него. Точка наблюдения находится на оси на расстоянии  $b$  от зеркала ( $a \leq R \leq b$ ). Где находится максимум нулевого порядка для  $a = 0,9R$ ? Сколько изображений будет давать такая пластинка и каковы их интенсивности?

Ответ. 1)  $r_m^2 = \pm m\lambda \frac{1}{\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right)}$ ; 2) условия макси-

мума: на кольце укладывается нечетное число зон Френеля.

$$\pm \frac{(2k-1)\lambda m}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}.$$

Для  $a = 0,9R$   $b = 9/8R$  и

$$I_0 : I_1 = \pi^2 / 4;$$

$$I_1 : I_3 : I_5 : \dots = 1 : 9 : 25 : \dots$$

5.8. Плоская пластинка с радиусом колец, пропорциональным корням квадратным из целых чисел, лишь приближенно передает размеры зон Френеля. Поэтому начиная с некоторого момента наблюдается заметное ухудшение качества изображения. Рассчитать допустимое число прозрачных зон. Точечный источник находится на расстоянии  $a$  от пластинки.

Указание. Разность хода по сравнению с квадратичным приближением должна быть  $< \lambda/4$ , чтобы не вносить заметной ошибки в амплитуду.

Ответ.

$$N < \left| \frac{1}{6\lambda} \frac{a^2}{a-f} \right|^{1/2}.$$

5.9. Эшелен Майкельсона состоит из стопы плоскопараллельных пластинок ( $N=30$ ). Ширина ступенек  $d=0,1$  см, высота  $h=1$  см. Определить положение, угловую ширину и число дифракционных максимумов ( $\lambda=6000$  Å).

Ответ. Условие максимума  $h(n-1)+d \sin \varphi = m\lambda$ . Расстояние между максимумами  $\Delta \varphi = \lambda/d = 6 \cdot 10^{-4}$  рад, что соответствует угловому диаметру дифракционной картины. Таким образом, в поле зрения можно наблюдать один или два максимума. Ширина максимума  $\delta \varphi = \lambda/Nd = 2 \cdot 10^{-5}$  рад. Порядок интерференции:  $m = h(n-1)/\lambda = 10^4$ .

5.10. На одномерную фазовую дифракционную решетку нормально падает плоская волна. На участках  $a$  и  $b$  рис. 36 оптические пути равны соответственно  $l_1 = n_1 z_1$  и  $l_2 = n_2 z_2$ . Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции при  $l_1 \rightarrow l_2$ ?

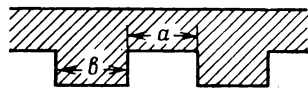


Рис. 36

Ответ. Углы дифракции не меняются, интенсивности стремятся к нулю.

5.11. Параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ ) падает нормально на щель  $b = 0,5 \text{ мм}$ . Линза с фокусным расстоянием  $f = 20 \text{ см}$  расположена за щелью. Какова линейная ширина центрального дифракционного максимума, наблюдаемого в фокальной плоскости линзы?

Ответ.  $\delta x = 0,4 \text{ мм}$ .

5.12. На плоскую дифракционную решетку с постоянной  $d = 0,005 \text{ мм}$  нормально падает свет от разрядной водородной трубки. Под каким минимальным углом  $\alpha$  к направлению первичного пучка надо поставить зрительную трубу, чтобы в поле зрения этой трубы линии водородного спектра  $H_\alpha = 6563 \text{ \AA}$  и  $H_\delta = 4102 \text{ \AA}$  сблизилась до совпадения?

Ответ.  $\alpha = 41^\circ$ .

5.13. Плоская амплитудная дифракционная решетка с отношением  $b/d = 0,1$  освещается нормально падающей плоской волной (длина волны  $\lambda$ ). Найти соотношение интенсивностей в максимумах 1-го и 6-го порядков, полученных с помощью этой решетки.

Ответ.  $I_1 : I_6 = 1 : 4$ .

5.14. Квадратное отверстие освещается параллельным пучком солнечных лучей, падающих нормально к плоскости отверстия. Найти размер  $L \times L$  изображения на экране, удаленном на  $50 \text{ м}$  от отверстия. Сторона отверстия  $L_0 = 0,2 \text{ см}$ . Границей освещенности на экране считать положение первого дифракционного минимума наиболее сильно отклоненных лучей ( $7000 - 4000 \text{ \AA}$ ).

Ответ.  $L = 3,5 \text{ см}$ .

5.15. Пучок рентгеновских лучей падает на решетку с периодом  $d = 1 \text{ мкм}$  под углом  $89^\circ 30'$ . Найти длину волны рентгеновских лучей, если максимум 2-го порядка наблюдается под углом  $\varphi_2 = 89^\circ$ .

Ответ.  $\lambda = 0,573 \text{ \AA}$ .

5.16. В камере с малым отверстием расстояние от отверстия до фотопластинки  $10 \text{ см}$ . Необходимо получить изображение Солн-



ца в видимом спектре ( $\lambda=5000 \text{ \AA}$ ). Каков должен быть диаметр отверстия, чтобы изображение было наилучшим?

Ответ.  $D=\sqrt{L\lambda}=0,22 \text{ мм}$ .

5.17. Две узкие параллельные щели находятся на расстоянии  $d$ . Щели освещены прямой светящейся металлической лентой шириной  $2b$ , находящейся на расстоянии  $L$  от щелей. Светофильтр пропускает длину волны  $\lambda$ . На экране наблюдается дифракционная картина. При увеличении  $d$  оказалось, что при  $d=d_0$  дифракционная картина исчезла. Определить  $2b$ .

Ответ.  $2b=\lambda L/d_0$ .

5.18. Рассеивающими центрами дифракционной решетки периодом  $d=3\cdot 10^{-3} \text{ мм}$  являются двойные полосы шириной  $b=d/4$ . Найти относительные интенсивности первых пяти дифракционных максимумов, приняв интенсивность максимума нулевого порядка за единицу. Сравнить их со случаем, когда рассеивающими центрами являлись одинарные полосы той же ширины.  $b=0,75 \text{ мкм}$ ,  $\lambda=5000 \text{ \AA}$ . Промежуток между полосами равен  $b/2$ .

Ответ. Отношение интенсивностей  $I_0:I_1:I_2:I_3:I_4:I_5$  равно для двоянных щелей:  $1:0,12:0,20:0,075:0,00:0,027$ ; а для одинарных щелей:  $1:0,8:0,4:0,089:0:0,032$ .

5.19. Узкий пучок рентгеновских лучей падает под углом скольжения  $60^\circ$  на естественную грань монокристалла  $\text{NaCl}$ , плотность которого  $2,16 \text{ г/см}^3$ . При зеркальном отражении от этой грани образуется максимум 2-го порядка. Найти  $\lambda$ .

Ответ.  $\lambda=3,14 \text{ \AA}$ .

5.20. При прохождении пучка рентгеновских лучей с  $\lambda=17,8\cdot 10^{-10} \text{ см}$  через поликристаллический образец на экране, расположенном на расстоянии  $l=15 \text{ см}$  от образца, образуется система дифракционных колец. Определить радиус светлого кольца, соответствующего второму порядку отражения от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием  $d=1,55 \text{ \AA}$ .

Ответ.  $r=l \operatorname{tg} 2\theta=3,5 \text{ см}$ , где  $\theta$  — угол скольжения.

5.21. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы от трех узких щелей, находящихся на расстоянии  $d=1 \text{ мм}$  друг от друга. Щели освещаются двумя линейными источниками, параллельными щелям, расстояние между которыми  $l=0,5 \text{ мм}$ . При каких условиях можно наблюдать дифракционную картину? Светофильтр пропускает свет длины  $\lambda=5\cdot 10^{-5} \text{ см}$ .

Ответ. Расстояние между щелями и источниками  $L=2 \text{ м}$ .

5.22. Протяженный источник света прикрыт дифракционной решеткой, содержащей  $N=10^2$  штрихов периодом  $d=0,1 \text{ мм}$ . Светофильтр пропускает свет  $\lambda=5\cdot 10^{-5} \text{ см}$ . С помощью такого излучателя освещают юнговские щели. Где можно поместить щели, чтобы наблюдалась яркая интерференционная картина? Расстояние между щелями и излучателем  $L=1 \text{ м}$ . Какова должна быть ширина юнговских щелей?

Ответ. Расстояние между щелями  $D=5 \text{ мм}$ , ширина щели  $<\lambda L/Nd=0,05 \text{ мм}$ .

## **Раздел VI**

# **РАЗЛОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТР. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ**

## **1. Теоретический материал**

Разложение излучения в спектр. Приборы с пространственным разложением спектра. Диспергирующие элементы спектральных приборов. Влияние свойств спектральных приборов на характер получаемого спектра. Распределение энергии светового потока по частотам. Аппаратная функция.

Угловая дисперсия — основная характеристика диспергирующего элемента. Дисперсия дифракционной решетки, призмы. Отличие дифракционного спектра от призмленного. Спектральные приборы для инфракрасной и ультрафиолетовой областей. Дисперсия интерферометра Фабри—Перо и пластинки Луммера—Герке.

Разрешающая сила спектральных приборов. Критерий Релея разрешения двух близких линий. Разрешающая сила дифракционной решетки. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки. Преимущества отражательных решеток с профилированным штрихом. Разрешающая сила эшелона Майкельсона. Разрешающая сила призмы. Приборы высокой разрешающей силы ( $\geq 10^6$ ), использующие диспергирующие элементы с большой разностью хода (интерферометр Фабри—Перо, пластинка Луммера—Герке). Максимальное значение разрешающей силы для приборов с пространственным разложением спектра. Область свободной дисперсии. Корреляционная спектроскопия (Фурье-спектроскопия). Спектральный анализ путем смещения. Сравнительные характеристики трех методов спектрального анализа в оптике.

## **2. Вопросы по теоретическому материалу**

**2.1.** Перечислите известные Вам методы измерения длины волн света.

**2.2.** В чем отличие призматического спектра от спектра дифракционной решетки?

**2.3.** Чем определяется вид аппаратной функции для решетки, призмы, эшелона Майкельсона, интерферометра Фабри—Перо?

**2.4.** Сравните функции распределения энергии по углам для пластинки Луммера—Герке и эталона Фабри—Перо.

2.5. Определите минимальное значение интенсивности прошедшего света при работе с эталоном Фабри—Перо, коэффициент отражения зеркал которого (по интенсивности) равен: 1)  $R=0,8$ ; 2)  $R=0,95$ .

2.6. Запишите функцию видности интерференционной картины в интерферометре Фабри—Перо с коэффициентом отражения зеркал  $R=0,9$ .

2.7. Покажите, что при разрешении двух линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одинаковой интенсивности с помощью дифракционной решетки критерий Релея соответствует наличию «провала» в 20% в результирующем контуре распределения интенсивности.

2.8. Покажите, что разрешающая сила дифракционной решетки определяется числом длин волн, укладываемых на разности хода между крайними лучами при максимальном угле дифракции.

2.9. Чем обеспечивается высокая разрешающая сила 1) интерферометра Фабри—Перо, 2) эшелона Майкельсона?

2.10. Исследуется расщепление линии в эффекте Зеемана ( $\Delta\lambda=10^{-3}\text{ \AA}$ ,  $\lambda\cong 6000\text{ \AA}$ ). Покажите, с какими спектральными приборами можно наблюдать это расщепление линии. При каких условиях?

2.11. Почему при работе с дифракционной решеткой и призмой важно обеспечить высокую степень пространственной когерентности света, падающего на решетку?

2.12. Каковы требования к монохроматичности света при работе с этими приборами, если разрешающая сила  $A=10^5$ ?

2.13. Покажите, почему при работе со спектральными приборами высокой разрешающей силы область дисперсии должна быть мала. Насколько?

2.14. Какими данными должны обладать диспергирующие элементы для работы в 1) инфракрасной области спектра? 2) ультрафиолетовой?

2.15. Укажите метод спектрального анализа, позволяющий разрешить две линии, отличающиеся по частоте на несколько герц.

2.16. Сформулируйте основы метода Фурье-спектроскопии.

2.17. Каковы преимущества Фурье-спектроскопии по сравнению с приборами с пространственным разложением спектра?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1 (1-й тип). Расчет угловой и линейной дисперсии спектральных приборов.

Методы расчета. 1. Используя условие получения интерференционного максимума, найти изменение положения максимума при изменении длины волны.

2. Рассчитать изменение угла наименьшего отклонения призмы при изменении длины волны.

3.2 (2-й тип). Расчет разрешающей силы и области дисперсии спектральных приборов.

Методы расчета. 1. Зная выражение для угловой дисперсии и углового расстояния между максимумами соседних порядков для длины волны  $\lambda$ , найти область дисперсии  $\Delta\lambda$ .

2. Используя аппаратную функцию прибора, угловую дисперсию и критерий разрешения, найти выражение для разрешающей силы прибора.

3.3 (3-й тип). Расчет условий практической реализации разрешающей силы спектрального прибора.

Методы расчета. 1. Используя вид аппаратной функции и критерий Релея, определить допустимую угловую расходимость пучка лучей, выходящих из коллиматора.

2. Оценив область дисперсии прибора, рассчитать допустимую степень монохроматичности света.

## б) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Найти угловую дисперсию в угловых секундах на  $1 \text{ \AA}$  в спектре первого порядка для решетки, имеющей 3937 штрихов на  $1 \text{ см}$ . Подсчитать линейную дисперсию спектрографа с такой решеткой при объективе с фокусным расстоянием  $f=50 \text{ см}$ .

Решение. Условие интерференционного максимума для решетки при нормальном падении на нее плоской монохроматической волны

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

Дифференцируя, находим

$$d \cos \varphi d\varphi = \lambda dm + m d\lambda,$$

$$D = \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)_{m=\text{const}} = \frac{m}{d \cos \varphi} \approx \frac{m}{d};$$

$$D_{m=1} = \frac{1}{d} = 8,15 \text{ угл.сек}/\text{\AA}.$$

Линейная дисперсия

$$D' = \frac{dx}{d\lambda} = D \cdot f = \frac{mf}{d} = 1,97 \cdot 10^{-2} \text{ мм}/\text{\AA},$$

$$\frac{1}{D'} = 50,7 \text{ \AA}/\text{мм}.$$

3.1.2. Определить угловую дисперсию пластинки Луммера—Герке с толщиной  $d$  и показателем преломления  $n$  с учетом дис-

персии вещества. Углы выхода луча  $\epsilon$  считать малыми (рис. 37).

Решение. Условие интерференционного усиления

$$2dn \cos r = m\lambda,$$

$r$  — угол преломления,

$$2dn \cos r = 2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \epsilon} = m\lambda, \quad \sin r = \frac{1}{n} \sin i = \frac{1}{n} \cos \epsilon.$$

Дифференцируя, находим

$$2d \frac{\left(2n \frac{\partial n}{\partial \lambda} + 2\cos \epsilon \sin \epsilon d\epsilon\right)}{2 \sqrt{n^2 - \cos^2 \epsilon}} = m d\lambda = \frac{2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \epsilon}}{\lambda} d\lambda,$$

откуда

$$D = \frac{d\epsilon}{d\lambda} = \frac{\frac{n^2 - \cos^2 \epsilon}{\lambda} - n \frac{dn}{d\lambda}}{\cos \epsilon \cdot \sin \epsilon} \approx \frac{(n^2 - 1) - n\lambda \frac{dn}{d\lambda}}{\lambda \epsilon} \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

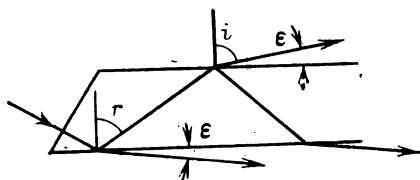


Рис. 37

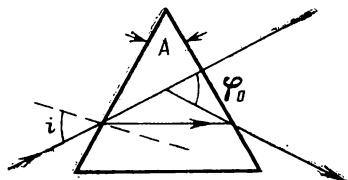


Рис. 38

3.1.3. Призма с преломляющим углом  $A=60^\circ$  изготовлена из флинта с показателем преломления  $n=1,70$ . Рассчитать угол, на который будут разведены две желтые линии ( $\lambda_1=5890 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_2=5896 \text{ \AA}$ ), если дисперсия вещества призмы в этом диапазоне длин волн  $\frac{dn}{d\lambda} = 956 \text{ см}^{-1}$ .

Решение. При работе призма устанавливается под углом наименьшего отклонения. Тогда угол отклонения луча  $\varphi_0$  (рис. 38) связан с показателем преломления зависимостью

$$n = \sin \frac{A + \varphi_0}{2} / \sin \frac{A}{2}.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{A + \varphi_0}{2}}{\sin \frac{A}{2}};$$

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A + \varphi_0}{2}} \frac{dn}{d\lambda},$$

$$\text{но } \cos \frac{A + \varphi_0}{2} = \cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}},$$

$$\Delta\varphi = D \Delta\lambda,$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda,$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 2}{\sqrt{4 - 1,7^2}} \cdot 956 \cdot 6 \cdot 10^{-8} = 1,55 \cdot 10^{-4} = 0,53'.$$

Ответ.  $\Delta\varphi = 0,53'$ .

2-й тип задач (3.2)

3.2.1. Рассчитать область дисперсии и разрешающую силу дифракционной решетки.

Решение. 1. Для нахождения области дисперсии  $G = \Delta\lambda$  воспользуемся условием перекрытия максимумов соседних порядков для начала и конца спектрального интервала  $\lambda \div (\lambda + \Delta\lambda)$ .  $d \sin \varphi = m(\lambda + \Delta\lambda)$  — максимум  $m$ -го порядка конца спектрального интервала;  $d \sin \varphi = (m+1)\lambda$  — максимум  $(m+1)$ -го порядка начала спектрального интервала. Условие перекрытия левого и правого краев:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda; \quad \Delta\lambda = \lambda/m.$$

Это же выражение получим, воспользовавшись тем, что  $\Delta\lambda = D\Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi$  — угловое расстояние между соседними максимумами:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi}{D} = \frac{\lambda}{d \cos \varphi} \bigg/ \frac{m}{d \cos \varphi} = \frac{\lambda}{m}.$$

2. Для нахождения разрешающей силы решетки определим угловую ширину главного дифракционного максимума  $\delta\varphi$ , т. е. расстояние от максимума до ближайшего к нему минимума:

$$d \sin \varphi = m\lambda \text{ — максимум,}$$

$$d \sin (\varphi + \delta\varphi) = m\lambda + \frac{\lambda}{N} \text{ — ближайший минимум,}$$

$$d \sin \varphi + d \cos \varphi \delta\varphi = m\lambda + \frac{\lambda}{N},$$

$$\text{откуда } \delta\varphi = \frac{\lambda}{dN \cos \varphi} \approx \frac{\Delta\varphi}{N},$$

т. е. угловая ширина максимума  $\delta\varphi$  в  $N$  раз меньше углового расстояния между максимумами  $\Delta\varphi$ .

Для нахождения разрешающей силы воспользуемся критерием Релея: две волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разрешаются, если максимум  $\lambda_1$  совпадает с минимумом для  $\lambda_2$ , т. е.  $\delta\lambda = \delta\varphi/D$  и разрешающая сила  $A = \lambda/\delta\lambda = mN$ . Таким образом, большая величина разрешающей силы для решетки получается за счет большого числа  $N$  интерферирующих лучей.

Необходимая степень монохроматичности линии  $\delta\lambda$  определяется длиной цуга  $l = L \sin \varphi$  и  $\delta\lambda \leq \lambda^2/(L \sin \varphi)$ .

3.2.2. Найти дисперсионную область и разрешающую силу пластинки Луммера—Герке длиной  $L = 30$  см, толщиной  $d = 1$  см и с показателем преломления  $n = 1,52$ . Расчет провести для водородной линии  $H_\beta$ .  $\lambda = 4861$  Å;  $dn/d\lambda = 9,6 \cdot 10^{-6}$  Å $^{-1}$ .

Решение. 1. Область дисперсии  $\Delta\lambda$  определим, зная угловое расстояние  $\Delta\epsilon$  между максимумами соседних порядков для длины волны  $\lambda$ :

$$G = \frac{\Delta\epsilon}{D}.$$

Область дисперсии  $\Delta\lambda$  рассчитывается из условия, что максимум  $(m+1)$ -го порядка для длины волны  $\lambda$  совпадает с максимумом  $m$ -го порядка для длины волны  $(\lambda + \Delta\lambda)$ .

Учитывая, что угловое расстояние между соседними максимумами  $\Delta\epsilon$  соответствует изменению разности хода на  $\lambda$ , получим

$$\delta(2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \epsilon}) = \delta(m\lambda) = \lambda \delta m = \lambda,$$

$$\lambda = \frac{2d \cdot 2\cos \epsilon \sin \epsilon \Delta\epsilon}{2\sqrt{n^2 - \cos^2 \epsilon}},$$

при малых углах  $\epsilon$

$$\lambda \cong \frac{2d \epsilon \cdot \Delta\epsilon}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

$$G = \frac{\Delta\epsilon}{D} = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2d[(n^2 - 1) - n\lambda dn/d\lambda]}.$$

При подстановке данных задачи получим

$$G = \Delta\lambda = 1,01 \cdot 10^{-9} \text{ см} = 0,10 \text{ Å}.$$

Так как дисперсия вещества сказывается слабо, то приближенно

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2d(n^2 - 1)^{1/2}} = \frac{\lambda}{m_{\max}},$$

где  $m_{\max}$  — максимальный порядок интерференции, который получается в центре наблюдаемой картины.

2. Для расчета разрешающей способности пластинки воспользуемся тем, что угловая ширина максимума  $\delta\epsilon$ , получающего

ся в результате интерференции  $N$  лучей примерно равной интенсивности, в  $N$  раз меньше углового расстояния  $\Delta\varepsilon$ :

$$\delta\varepsilon = \Delta\varepsilon/N.$$

Согласно критерию Релея можно разрешить две близкие линии  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , отличающиеся на  $\delta\lambda$ , такие, что угловое расстояние между максимумами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  должно быть не меньше угловой ширины максимума

$$\delta\lambda = \frac{\delta\varepsilon}{D}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\varepsilon} D = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} N,$$

где  $\Delta\lambda$  — область дисперсии,

$$A = \frac{2d[(n^2 - 1) - n\lambda \, dn/d\lambda]}{\lambda \sqrt{n^2 - 1}} N.$$

Для расчета числа интерферирующих лучей  $N$  воспользуемся тем, что  $N \cdot 2d \operatorname{tg} r = L$  и  $i \approx 90^\circ$ :

$$N = \frac{L \cos r}{2d \sin r} = \frac{Ln \sqrt{1 - \sin^2 r}}{2d \sin i} \approx \frac{L}{2d} \sqrt{n^2 - 1},$$

тогда  $A = \frac{L}{\lambda} \left[ (n^2 - 1) - n\lambda \frac{dn}{d\lambda} \right] = 8,45 \cdot 10^5,$

т. е. с пластинкой можно разрешить две водородные линии, отличающиеся на  $\delta\lambda = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$ .

**3.2.3.** Рассчитать область дисперсии и разрешающую силу эталона Фабри—Перо; коэффициент отражения зеркал  $R = 0,9$ ; расстояние между пластинами равно  $h = 2 \text{ см}$ ,  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ .

Решение. 1. Угловая дисперсия эталона Фабри—Перо

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{2h \cos \varphi}.$$

Угловое расстояние между максимумами

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2h \sin \varphi},$$

так что  $G = \Delta\lambda = \Delta\varphi/D = \frac{\lambda^2}{2h \cos \varphi}.$

2. Для нахождения разрешающей силы найдем аппаратную функцию прибора. Рассчитаем ширину полосы. Распределение интенсивности

$$I_{\text{прош}}/I_{\text{пад}} = 1 / \left( 1 + 4 \frac{R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) = 1 / (1 + F \sin^2 \delta/2),$$



где  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos \varphi$  — разность фаз между интерферирующими лучами, число которых  $N > 20 \div 30$ . Введя  $\delta = 2\pi n + \epsilon$ , где  $\epsilon$  мало, получим

$$I = I_0 / \left( 1 + F \frac{\epsilon^2}{4} \right).$$

Оценим  $\epsilon$  на уровне полуширины кривой:

$$I/I_0 = 0,5 = 1 / \left( 1 + F \frac{\epsilon^2}{4} \right),$$

получим  $\epsilon = \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ ;

при  $R = 0,9$

$$\epsilon = \frac{0,1}{0,944} = 0,105.$$

Расстояние между соседними максимумами соответствует  $\epsilon = \pi$ , т. е. резкость картины

$$V' = \pi/\epsilon \cong 30.$$

Максимумы отделяются друг от друга широкими минимумами.

Для расчета разрешающей силы  $A$  воспользуемся тем, что в центре картины  $m_{\max} = 2h/\lambda$  и  $dm\lambda + m d\lambda = 0$ , так что  $\lambda/\delta\lambda = = m/\delta m$ . Разрешение наступит, когда  $\delta m = \epsilon/\pi$  и

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \frac{\pi}{\epsilon} = m \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R} = m N_{\text{эфф}},$$

где  $N_{\text{эфф}} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$  — эффективное число интерферирующих лучей, интенсивность которых спадает с ростом  $\delta$

$$A = m N_{\text{эфф}} = \frac{2h}{\lambda} \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R} \cong 1,18 \cdot 10^6,$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{A} = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ Å}.$$

**3.2.4. Эшелон Майкельсона** представляет собой стопу из 10 стеклянных пластин ( $n=1,5$ ) толщиной  $d=2$  см (рис. 39). Можно ли с его помощью обнаружить дублетную структуру  $H\alpha$  линии водорода ( $\lambda=6583$  Å)? Разность длин волн линий дублета  $\Delta\lambda = 1,9 \cdot 10^{-9}$  см.

Решение. Эшелон Майкельсона — фазовая решетка с большим  $m$  и малым числом интерферирующих лучей.

Так как решетка грубая ( $x_0 \sim 1$  мм,  $d \cong 1$  см), то углы дифракции  $\varphi$  малы. Угловой диаметр всей дифракционной картины

мал, число максимумов в поле зрения один — два, что резко повышает светосилу картины:

$$\begin{aligned}\Delta &= n d + (CL - AD) = n d + x_0 \sin \varphi - d \cos \varphi = \\ &= d(n - \cos \varphi) + x_0 \sin \varphi \approx d(n - 1) + x_0 \varphi = \Delta_1 + x_0 \varphi,\end{aligned}$$

где  $\Delta_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \delta$ ,  $\delta$  — скачок фазы. Условие максимума  $\Delta = m\lambda$ . Угловой диаметр дифракционной картины определяется направле-

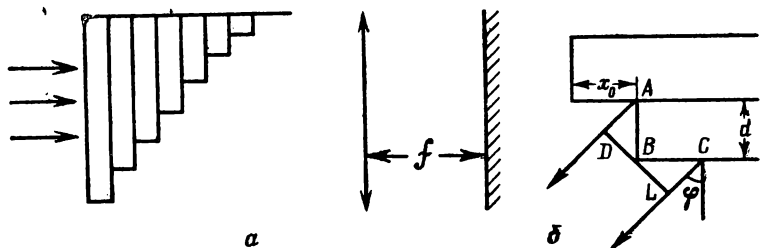


Рис. 39

нием на первый дифракционный минимум, даваемый ступенькой шириной  $x_0$ :

$$x_0 \sin \varphi = \pm \lambda,$$

т. е.  $\Delta \varphi_1 = 2\lambda/x_0$ .

Угловое расстояние между максимумами  $\Delta \varphi$  определим из условия  $\delta(\Delta) = \lambda$ , т. е.  $x_0 \Delta \varphi = \lambda$ . Таким образом, в поле зрения можно наблюдать один или два максимума  $m$ -го порядка, в котором и сконцентрирована вся энергия (рис. 40).

Определим порядок интерференции  $m$ .

$$\Delta = m\lambda \approx \Delta_1,$$

так как  $\varphi$  мало,

$$m = \frac{d(n-1)}{\lambda} = 1,5 \cdot 10^4.$$

Разрешающая сила эшелбна

$$A = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = Nm = 10 \cdot 1,5 \cdot 10^4 = 1,5 \cdot 10^5.$$

Для разрешения дублета  $H_\alpha$  линии необходимо иметь

$$A = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{6,56 \cdot 10^{-8}}{1,4 \cdot 10^{-8}} = 4,7 \cdot 10^4,$$

т. е. дублет можно разрешить.

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Какую минимальную толщину должна иметь пластинка Луммера—Герке, чтобы разрешить  $H_{\alpha}$ -линию водорода ( $\lambda = 6563 \text{ \AA}$ ), представляющую узкий дублет ( $\Delta\lambda = 1,4 \cdot 10^{-9} \text{ см}$ ), если длина пластинки такова, что свет успевает претерпеть 10 отражений. Какова должна быть степень монохроматичности света? Дисперсией вещества пренебречь.

**Решение.** Необходимое разрешение

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 4,7 \cdot 10^4,$$

но  $A = mN$ , следовательно,

$$m = \frac{4,7 \cdot 10^4}{10} = 4,7 \cdot 10^3.$$

Оценим необходимую толщину пластинки  $d$ :

$$2dn \cos r \approx 2d\sqrt{n^2 - 1} = m\lambda,$$

$$d = \frac{4,7 \cdot 10^3}{2\sqrt{n^2 - 1}} = 1,38 \text{ мм}.$$

Для обеспечения работы в  $m$ -м порядке необходимо получить монохроматичность света не хуже, чем

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN} = \frac{6,563 \cdot 10^{-8}}{4,7 \cdot 10^4} = 0,14 \text{ \AA},$$

т. е. падающий на пластинку свет необходимо пропустить сначала через призменный монохроматор и выделить узкую область

$$\Delta\lambda < 0,14 \text{ \AA}.$$

**3.3.2.** Спектрограф имеет стеклянную призму с основанием  $b = 10 \text{ см}$  и преломляющим углом  $A = 60^\circ$ , установленную при работе на угол наименьшего отклонения вблизи  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . Показатель преломления стекла призмы  $n = 1,73$ ; фокусное расстояние объектива коллиматора  $f = 25 \text{ см}$ . Какова должна быть ширина коллиматорной щели  $\Delta x$ , чтобы можно было практически полностью использовать теоретическую разрешающую способность призмы?

**Решение.** Разрешающая способность призмы

$$A = \lambda/\delta\lambda = b \, dn/d\lambda.$$

Оценим угловую ширину максимума, соответствующую теоретической разрешающей способности призмы:

$$\delta\varphi = D \, \delta\lambda = D \cdot \frac{\lambda}{b \, dn/d\lambda},$$

где  $D$  — угловая дисперсия призмы.

При симметричной установке призмы

$$D = \frac{2 \sin A/2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 A/2}} \frac{dn}{d\lambda}$$

(см. задачу 3.1.3).

Таким образом

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{b} \frac{2 \sin A/2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 A/2}} \cong \frac{2\lambda}{b}$$

Конечная ширина коллиматорной щели приводит к тому, что выходящий из коллиматора пучок имеет угловую расходимость  $\Delta\alpha = \Delta x/f$ , т. е. на призму падает свет с определенной пространственной некогерентностью, что приводит к смещению положения максимума в пределах этого угла  $\Delta\alpha$ .

Для реализации теоретической разрешающей силы  $\Delta\alpha$  должен быть  $<$  угловой ширины максимума  $\delta\varphi$ , т. е.  $\Delta\alpha \ll 2\lambda/b$  или  $\Delta x \ll \frac{2\lambda}{b} f$ :

$$\Delta x \ll 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

\* \* \*

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Как изменится разрешающая способность призмы при изменении преломляющего угла вдвое?

4.2. Как изменится разрешающая способность призмы при изменении сорта стекла при той же геометрии?

4.3. Четыре трехгранные призмы сложены вместе. Изменится ли дисперсия  $D$ ? Разрешающая способность?

4.4. Какова должна быть степень монохроматичности света при работе с эталоном Фабри—Перо? ( $d=1$  см,  $\lambda=5000$  Å,  $\varphi$  мало).

4.5. Какую разрешающую силу должен иметь спектральный аппарат для разрешения дублета Na ( $\lambda_1=5890$  Å,  $\lambda_2=5896$  Å)?

4.6. Длины волн спектральных линий обычно измеряются с точностью около  $0,001$  Å с помощью спектрографов, разрешающая сила которых около  $0,010$  Å. Не нарушаются ли при этом какие-нибудь законы физики?

4.7. Решетка, рассчитанная на применение ее в инфракрасной области спектра, характерна тем, что вся интенсивность дифракционных полос концентрируется в спектре первого порядка на длине волны  $\lambda=80000$  Å. Если такую решетку освещать видимым светом ( $\lambda=4000 \div 7000$  Å), то где будут концентрироваться наиболее интенсивные пучки различной цветности?

4.8. Сравнить разрешающую способность призмы с максимальной разрешающей способностью дифракционной решетки, длина которой равна длине основания призмы ( $dn/d\lambda=956$  см $^{-1}$ ,  $\lambda=5000$  Å).

4.9. Определить постоянную, которую должна иметь решетка, способная анализировать инфракрасный спектр с  $\lambda$  до 100 мкм?

4.10. Изменится ли разрешающая сила решетки при изменении наклона первичного пучка, падающего на решетку?

4.11. Изменятся ли разрешающая сила и дисперсионная область решетки, если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдаются дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки?

4.12. Как изменятся область дисперсии и разрешающая сила пластинки Луммера—Герке, если: 1) длину  $L$  увеличить вдвое, оставив толщину  $d$  неизменной; 2) увеличить вдвое  $d$ , оставив  $L$  неизменной?

4.13. Две пластинки Луммера—Герке сделаны одна из флинта ( $n=1,7$ ), а другая из крона ( $n=1,5$ ). Какая имеет большую область дисперсии и какая разрешающую силу?

4.14. Могут ли перекрываться спектры 1-го и 2-го порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом ( $\lambda = 4000 \div 7000$  Å)?

4.15. Какова должна быть разрешающая сила прибора, способного разделить две линии, отличающиеся на  $\Delta\nu = 2$  Гц?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Определить длину волны спектральной линии, изображение которой, даваемое дифракционной решеткой в спектре третьего порядка, совпадает с изображением линии  $\lambda = 4861$  Å в спектре четвертого порядка.

Ответ.  $\lambda = 6481$  Å.

5.2. Найти расстояние между компонентами желтой линии Na ( $\lambda_1 = 5890$  Å,  $\lambda_2 = 5896$  Å) на фотографическом негативе в спектрографе с дифракционной решеткой, содержащей 200 штрихов на мм, и объективом с фокусным расстоянием  $f = 50$  см в спектре второго порядка.

Ответ.  $\Delta x = 0,12$  мм.

5.3. Подсчитать разрешающую силу решетки с периодом  $2,5 \cdot 10^{-4}$  см и шириной 3 см в спектрах первого и четвертого порядков.

Ответ.  $A_1 = 12000$ ,  $A_4 = 48000$ .

5.4. Коллиматорная щель  $S$ , освещаемая источником света, помещена в главном фокусе линзы  $L$  с фокусным расстоянием  $f = 20$  см. Пройдя линзу, свет падает нормально на дифракционную решетку. Период решетки  $d = 0,001$  см, число штрихов  $N = 1000$ . Какова должна быть ширина коллиматорной щели  $\Delta x$ , чтобы полностью использовалась разрешающая способность решетки в окрестности длины волны  $\lambda = 5000$  Å?

Ответ.  $\Delta x \ll 0,001$  см.

5.5. Найти максимальный и минимальный порядки спектров, которые могут наблюдаться с пластинкой Луммера—Герке дли-

ной  $L=30$  см, толщиной  $d=1$  см и с показателем преломления  $n=1,52$ .

Ответ.  $m_{\min}=47200$ ;  $m_{\max}=62400$ .

5.6. Какую минимальную длину должна иметь пластинка Луммера—Герке ( $n=1,5$ ), чтобы разрешить дублетную структуру  $H_{\alpha}$  ( $\lambda=6563$  Å) линий? Разность длин волн дублета  $\Delta\lambda=1,4 \cdot 10^{-9}$  см. Дисперсией вещества пренебречь.

Ответ.  $L=2,5$  см.

5.7. Определить угловое расстояние между соседними максимумами для пластинки Луммера—Герке ( $n=1,52$ ,  $d=1$  см) для  $H_{\beta}$  ( $\lambda=4861$  Å) линии водорода при условии, что угол выхода лучей  $\varepsilon=1^{\circ}$ .

Ответ.  $\Delta\varepsilon=5,5'$ .

5.8. Рассчитать угловую ширину 10-го видимого кольца в интерферометре Фабри—Перо, если коэффициент отражения зеркал (по интенсивности)  $R_0=0,9$ , а толщина воздушного зазора  $d=2$  см,  $\lambda=5000$  Å.

Ответ.  $\delta\varphi=1,2 \cdot 10^{-4}$  рад.

5.9. В условиях задачи 5.8 рассчитать длину когерентности света, необходимую для наблюдения интерференционной картины.

Ответ.  $L_{\text{ког}}=2,4$  м.

5.10. Найти величину наименьшего основания призмы, изготовленной из стекла, дисперсия которого вблизи  $D$ -линии Na  $dn/d\lambda=956$  см $^{-1}$  и которая может разрешить желтый дублет Na ( $\lambda_1=5890$  Å,  $\lambda_2=5896$  Å).

Ответ.  $b=1,027$  см.

5.11. Каков порядок  $m$  спектра при работе в области  $\lambda=5000$  Å с эшеломом Майкельсона, высота ступенек которого  $d=1$  см, а показатель преломления стекла  $n=1,5$ ? Найти угловое расстояние между максимумами  $\Delta\varphi$  для той же области спектра при ширине ступеньки  $x_0=0,2$  мм.

Ответ.  $m=10000$ ;  $\Delta\varphi=51,5''$ .

5.12. Параллельный пучок света падает нормально на дифракционную решетку с периодом  $d=10^{-3}$  мм, имеющую  $5 \cdot 10^4$  штрихов. Дифракционная картина проектируется с помощью линзы с  $f=50$  см на фотопластинку, способную разрешить 40 линий/мм. Какова разрешающая сила такого спектрографа во втором порядке в окрестности линии  $\lambda=5000$  Å?

Ответ.  $A_{\text{спектр}}=2 \cdot 10^4 < A_{\text{реш}}=10^5$ .

## **Раздел VII**

# **ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И МЕТОДОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА**

### **1. Теоретический материал**

Методы формирования изображения предмета: стеноскопия, оптические системы, голография. Отличительные особенности, достоинства и недостатки этих методов.

Оптические системы, формирующие изображение. Геометрия оптической системы. Линейное и угловое увеличение. Телескоп, микроскоп, лупа, глаз.

Дифракционная теория формирования изображения. Тонкая линза как элемент, выполняющий преобразование Фурье и формирующий изображение. Функция пропускания тонкой линзы. Влияние ограничивающей апертуры оптической системы на спектр Фурье, пропущенный системой. Ограничение спектра Фурье пространственных частот за счет процесса распространения света от предмета до регистрирующего устройства. Разрешающая способность объектива микроскопа.

Пространственная фильтрация. Получение изображения фазовых объектов: метод темного поля, метод свилей, фазово-контрастный метод Цернике.

Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении. Разрешающая способность газа, разрешающая способность телескопа. Полезное увеличение оптической системы.

Получение изображений методом восстановления волнового фронта: 1) регистрация амплитуды и фазы предметной волны, 2) восстановление когерентной волны.

Опорная и предметная волны. Распределение комплексных амплитуд и интенсивности в плоскости голограммы. Материалы для записи голограмм. Функция пропускания фотопластинки с голограммой.

Восстановление исходной волны. Действительное и мнимое изображения. Голограмма Габора. Уравнение голограммы Габора. Недостатки схемы Габора. Схема Лейта и Упатниекса. Возможность пространственного разделения действительного и мнимого изображения.

Голограмма точечного источника. Голограмма Френеля. Геометрия голограммы Френеля (в параксиальном приближении). Пространственная частота интерференционных полос. Влияние

разрешающей способности регистрирующей среды на разрешение предмета.

Голограмма Фурье. Характер распределения интерференционных полос. Возможность получения изображения с высоким разрешением.

Восстановление изображения с помощью точечного источника. Геометрия изображения (в параксиальном приближении). Возможность получения поперечных увеличений. Структура волнового поля восстановленной волны для точечного источника. Влияние размеров голограммы на качество изображения. Влияние длины волны при восстановлении изображения.

Требования к источникам света в голографическом методе формирования изображения.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Чем определяется качество изображения? Его светосила?

2.2. Каковы условия получения неискаженного изображения плоских предметов? Объемных?

2.3. Перечислите известные Вам аберрации оптических систем, укажите их причины и способы устранения.

2.4. Чем определяется глубина фокуса, резкость изображения?

2.5. Можно ли получить в одной и той же оптической системе большие угловые и большие линейные увеличения?

2.6. Каково назначение микроскопа? Телескопа? Лупы?

2.7. Запишите выражение для функции пропускания тонкой линзы.

2.8. Перечислите основные этапы формирования изображения в оптической системе. В чем суть процесса двойной дифракции?

2.9. Чем определяется распределение интенсивности в задней фокальной плоскости линзы?

2.10. Запишите соотношение между пространственными частотами функции пропускания объекта и угловым спектром дифрагированных волн.

2.11. Дана функция пропускания объекта  $t(x, y)$ . Запишите ее Фурье-образ  $\mathcal{F}\{t(x, y)\}$  для пространственных частот  $\omega_x$  и  $\omega_y$ .

2.12. Что представляет собой поле дифрагированных волн для предмета с синусоидальной функцией пропускания по амплитуде? Как выглядит в этом случае распределение интенсивности в задней фокальной плоскости линзы?

2.13. Изображение формируется в видимом диапазоне с длиной волны  $\lambda$ . Числовая апертура объектива микроскопа  $A=0,3$ . Укажите наивысшую пространственную частоту, которая может быть передана этой системой.

2.14. Чем определяется (теоретически) предельная пространственная частота, которая может быть изображена оптической системой?



- 2.15. Почему применение иммерсии увеличивает разрешающую способность микроскопа?
- 2.16. Как сказываются на разрешающей способности микроскопа условия освещения (когерентное и некогерентное)?
- 2.17. Запишите условие разрешения двух точек при некогерентном освещении. Как изменится разрешающая способность, если освещение когерентно и разность фаз колебаний, посылаемых этими точками, равна  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$ ,  $2\pi$ ?
- 2.18. Приведите примеры объектов, модулирующих падающий свет по фазе, а не по амплитуде. Запишите функцию пропускания таких фазовых объектов.
- 2.19. Как изменится изображение объекта, если с помощью маски в фокальной плоскости закрыть центральный максимум?
- 2.20. Чем определяется контраст изображения?
- 2.21. В чем состоит сущность фазово-контрастного метода получения изображений?
- 2.22. В чем состоит сущность метода темного поля? Метода свилей?
- 2.23. Укажите способы регистрации фазы волн оптического диапазона.
- 2.24. Нарисуйте принципиальную схему записи амплитуды и фазы волны от когерентно освещенного объекта.
- 2.25. Нарисуйте схему восстановления изображения.
- 2.26. Запишите выражения для комплексной амплитуды опорной волны для следующих случаев:
- 1) опорная волна плоская, идущая вдоль оси  $z$ ;
  - 2) опорная волна плоская, вектор  $k$  составляет угол  $\pm\theta$  с осью  $z$ ;
  - 3) опорная волна сферическая, источник находится на оси на расстоянии  $\pm z_r$  от плоскости голограммы.
- 2.27. Запишите выражение для распределения интенсивности в плоскости голограммы  $I(x_2, y_2)$  при заданной опорной и предметной волнах. При каких условиях коэффициент пропускания негатива, на котором зарегистрирована голограмма, линейно отображает распределение интенсивности в плоскости голограммы? Напишите связь между ними.
- 2.28. Голограмма освещается опорной волной. Запишите распределение комплексных амплитуд сразу за голограммой. Где будет действительное и мнимое изображение предмета?
- 2.29. Нарисуйте схему получения голограммы Габора и восстановления изображения. Как формируется опорная волна?
- 2.30. При каких условиях можно считать отдельные точечные источники независимыми?
- 2.31. Получите уравнение голограммы Габора.
- 2.32. Перечислите недостатки схемы Габора.
- 2.33. Нарисуйте схему Лейта и Упатниекса. В чем преимущество этой схемы по сравнению с голограммой Габора?
- 2.34. Как осуществляется пространственное разделение дей-

ствительного и мнимого изображений, прямопрошедшей и дифрагированной волн?

2.35. Покажите, что если голограмму осветить копией опорной волны  $A(x, y)$  при записи, то возникает волна, с точностью до постоянного множителя повторяющая предметную волну. Что будет, если восстанавливающая волна  $B(x, y) \equiv A^*(x, y)$ ?

### 3. Основные типы задач и решений

Приступая к решению задач, условимся придерживаться определенных правил.

1. Уравнение плоской волны запишем в виде

$$A = A_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A_0 e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} = \hat{A}(x, y, z) e^{-i\omega t}.$$

Таким образом, для волны, распространяющейся в положительном направлении  $z$ , комплексная амплитуда  $\hat{A}$  будет иметь вид

$$\hat{A}(x, y, z) = A_0 e^{ik_z z} = A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z}.$$

Знак «минус» в экспоненте временного множителя обеспечивает отставание по фазе колебаний в точке  $z > 0$  по сравнению с колебаниями в точке  $z = 0$ .

Для плоской волны, направление вектора  $\vec{k}$  которой составляет угол  $\theta$  с осью  $z$  (рис. 41, а), колебания в точке  $(-x)$  отстают

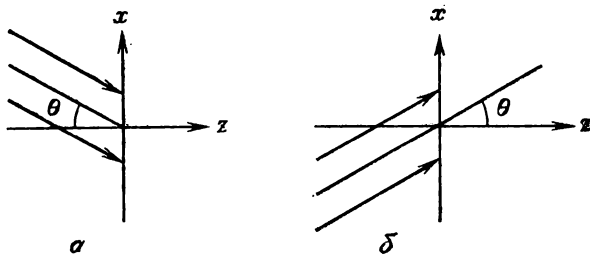


Рис. 41, а, б

по фазе от колебаний в точке  $x = 0$ , и комплексная амплитуда будет иметь вид

$$\hat{A} = A_0 e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cdot x} = A_0 e^{-i\alpha x},$$

так что  $e^{-i\alpha x}$  можно рассматривать как оператор наклона «вниз». Аналогично для волны, идущей «вверх» (рис. 41, б), обеспечено отставание по фазе в точке  $x > 0$ , если  $\hat{A} = A_0 e^{-i\alpha x}$  и  $e^{i\alpha x}$  — оператор наклона «вверх».

2. Сферическую волну в параксиальном приближении запишем в виде

$$A = A_0 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}} e^{-i\omega t}.$$

Для расходящейся волны комплексная амплитуда будет иметь вид

$$\hat{A} = A_0 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}},$$

где  $z$  — расстояние точки наблюдения от источника и  $e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$  — оператор расходимости.

Аналогично для сходящейся волны

$$\hat{A} = A_0 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$$

и  $e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$  — оператор сходимости\*.

3. В качестве регистрирующей среды для записи голограммы будем рассматривать фотопластинки, предполагая, что экспозиция соответствует линейному участку характеристической кривой.

4. Длину волны света при записи будем обозначать через  $\lambda$ , а длину волны света при восстановлении волнового фронта — через  $\lambda_2$ .

5. Комплексную амплитуду опорной волны будем обозначать

$$\hat{R} = R_0(x, y) e^{i\varphi_r}.$$

Комплексную амплитуду предметной волны обозначим

$$\hat{A} = A_0(x, y) e^{i\varphi_a}.$$

Комплексную амплитуду восстанавливающей волны запишем как

$$\hat{B} = B_0(x, y) e^{i\varphi_b}.$$

6. Считаем, что при записи голограммы выполнены условия, при которых можно пренебречь взаимной интерференцией волн, идущих от разных точек предмета, т. е. рассматривать отдельные точки как независимые источники.

## а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Из широкого круга задач, связанных с формированием изображения, рассмотрим только некоторые, позволяющие уяснить

---

\* Если уравнение волны записывать в виде

$$A = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\omega t},$$

то знаки у операторов будут обратными.

механизм формирования изображения и рассчитать разрешающую силу системы.

**3.1 (1-й тип).** Роль линзы в процессе формирования оптического изображения.

Метод решения. В параксиальном приближении рассчитать функцию пропускания тонкой линзы. Используя интеграл Кирхгофа—Френеля, найти распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости линзы и в плоскости изображения.

**3.2 (2-й тип).** Найти распределение комплексных амплитуд в плоскости изображения линзы по известному распределению комплексных амплитуд в фокальной плоскости линзы. Фильтрация пространственных частот.

Метод решения. Использовать связь между угловым спектром дифрагированных волн и пространственными частотами функции пропускания объекта.

**3.3 (3-й тип).** Расчет контраста изображения фазового объекта.

Метод решения. Использовать связь между угловым спектром дифрагированных волн и пространственными частотами.

**3.4. (4-й тип).** Геометрия регистрации голограмм точечного источника и восстановление изображений.

Метод решения. Записать в координатной форме разность фаз между предметной и опорной волнами в плоскости голограммы. Сравнивая полученное выражение с фазой сферической волны, найти необходимые величины.

**3.5 (5-й тип).** Расчет увеличений, получаемых в голографии.

Метод решения. Используя геометрические соотношения между координатами источника, предмета и изображения, рассчитать поперечное и угловое увеличения.

**3.6 (6-й тип).** Влияние разрешающей способности регистрирующей среды на запись голограммы и восстановление изображения в голограммах Френеля и Фурье.

Метод решения. Установить связь между разрешающей способностью регистрирующей среды и пространственной частотой полос на голограмме, а также размерами интерференционного поля и разрешением предмета.

**3.7 (7-й тип).** Расчет волнового поля восстановленной предметной волны.

Метод решения. Воспользоваться интегралом Кирхгофа—Френеля и рассчитать распределение комплексных амплитуд.

## б) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Рассчитать функцию пропускания тонкой линзы.

Решение. Будем рассматривать тонкую линзу (т. е. такую, что луч, вошедший с одной стороны линзы в точке с координата-

ми  $(x, y)$ , выйдет с другой стороны в точке с примерно теми же координатами) ограниченную сферическими поверхностями с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 42, а).

Задано поле перед линзой  $V_l(x, y)$ . Найдем поле  $V_l'(x, y) = V_l t(x, y)$  непосредственно за линзой, пренебрегая поглощением

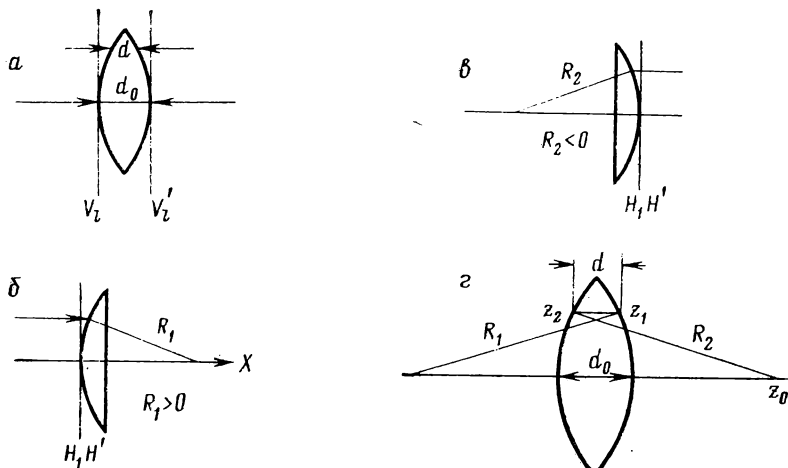


Рис. 42, а, б, в, г

в линзе. При этих условиях  $t(x, y)$  — чисто фазовый множитель  $t(x, y) = e^{i\varphi(x, y)}$ .

Найдем изменение фазы  $\varphi(x, y)$  луча, проходящего через линзу:

$$\varphi(x, y) = kn d(x, y) + k [d_0 - d(x, y)] = kd(x, y) (n - 1) + k d_0 = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ .

Воспользуемся правилом знаков: расстояния, отсчитываемые по ходу луча (слева направо), берем со знаком «плюс». Радиус кривизны отсчитывается от главной плоскости  $H$  сферической поверхности (рис. 42, б, в, г).

Тогда  $d = z_1 - z_2$ ,  $d_0 = (z_0 - R_2) - R_1 = z_0 - (R_1 + R_2)$ ,

$$z_1 = \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}, \quad z_2 = z_0 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Если ограничиться узкой параксиальной областью, то можно принять, что

$$z_1 = R_1 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2} \right), \quad z_2 = z_0 - R_2 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2} \right),$$

так что

$$d(x, y) = z_1 - z_2 = -d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$\Delta\varphi = k d(n-1) + k d_0 = -k \frac{x^2 + y^2}{2} (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) -$$

$$- k d_0(n-1) + k d_0 = -k \frac{x^2 + y^2}{2f} - \Delta\varphi_0,$$

где  $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ ;  $f$  — фокусное расстояние линзы. Таким образом,

$$t(x, y) = \exp(-i\Delta\varphi_0) \times \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2f}\right).$$

Первый множитель дает постоянный фазовый сдвиг, второй — аппроксимирует в квадратичном приближении сферическую волну.

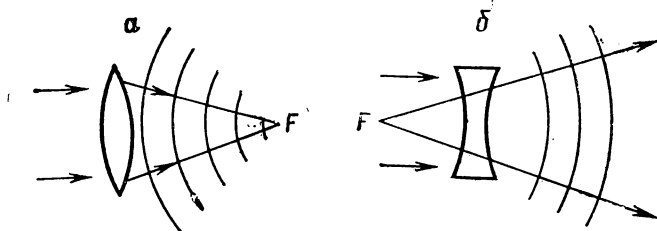


Рис. 43

При  $f > 0$  получим сходящуюся волну, при  $f < 0$  — расходящуюся (рис. 43).

Напоминаем, что волновое поле мы представили в виде  $V(\vec{r}, t) = V_0 e^{-i\omega t} e^{ik\vec{r}}$ . Таким образом, комплексная амплитуда поля непосредственно за линзой имеет вид

$$V'l = Vl \exp\left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right]$$

и, следовательно, функция пропускания тонкой линзы в параксиальном приближении имеет вид

$$t(x, y) = e^{i\varphi(x, y)} = e^{-ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2f} \right)}.$$

Фазовый сдвиг, вносимый линзой, обеспечивает таутохронность лучей (с определенной длиной волны), сходящихся в фокусе линзы.

3.1.2. Предмет, функция пропускания которого  $t(x, y)$ , расположен в передней фокальной плоскости линзы. Показать, что в задней фокальной плоскости формируется Фурье-образ функции пропускания предмета (рис. 44).

Решение. Пусть на предмет нормально падает плоская волна единичной амплитуды. Спектр Фурье света, прошедшего через предмет,

$$\mathcal{F}_0(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy.$$

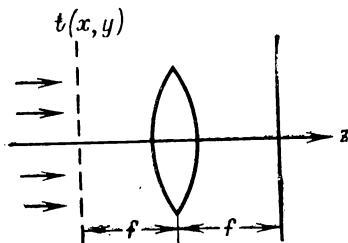


Рис. 44

Пусть  $\mathcal{F}_l(\omega_x, \omega_y)$  — спектр Фурье света, падающего на линзу. Так как линза находится на расстоянии  $f$  от предмета, то

$$\mathcal{F}_l(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}_0(\omega_x, \omega_y) e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2f}}$$

(Мы предполагаем, что расстояния  $z$  настолько велики, что можно пользоваться приближением Френеля и что размеры дифракционных отверстий  $\gg \lambda$ , т. е. поле после предмета состоит из распространяющихся волн.) Здесь

$$\omega_x = k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{f}, \quad \omega_y = k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{f},$$

так что

$$\mathcal{F}_l(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}_0(\omega_x, \omega_y) e^{-i \frac{f}{4\pi} (\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$

Для того чтобы рассчитать комплексные амплитуды в задней фокальной плоскости линзы, воспользуемся интегралом Кирхгофа—Френеля

$$V_f(x_f, y_f) = \frac{e^{ik \frac{x_f^2 + y_f^2}{2f}}}{i\lambda f} \iint_{\text{по апертуре}} V_l(x_l, y_l) e^{-ik \frac{x_l x_f + y_l y_f}{f}} dx_l dy_l,$$

$x_l, y_l$  — координаты в плоскости линзы,  $x_f, y_f$  — координаты в плоскости наблюдения,  $V_l(x_l, y_l)$  — распределение комплексных амплитуд света, падающего на линзу. Квадратичные фазовые множители исчезли, так как функция пропускания линзы  $t_l(x_l, y_l) =$

$$= e^{-ik \frac{x_l^2 + y_l^2}{2f}}.$$

Мы предполагаем, что функция пропускания отлична от нуля только в пределах апертуры линзы. При этом интеграл по апертуре может быть заменен на интеграл с бесконечными пределами. Интеграл представляет Фурье-спектр света, падающего на линзу, для частот

$$\omega_x = k \frac{x_f}{f} \quad \text{и} \quad \omega_y = k \frac{y_f}{f}$$

$$V_f(x_f, y_f) = \frac{e^{ik \frac{(x_f^2 + y_f^2)}{2f}}}{i\lambda f} \mathcal{F}_t(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{i\lambda f} \mathcal{F}_0(\omega_x, \omega_y).$$

Координаты плоскости предмета  $(x, y)$  и плоскости наблюдения  $(x_f, y_f)$  связаны соотношениями  $x = -x_f$ ,  $y = -y_f$  (рис. 45, а).

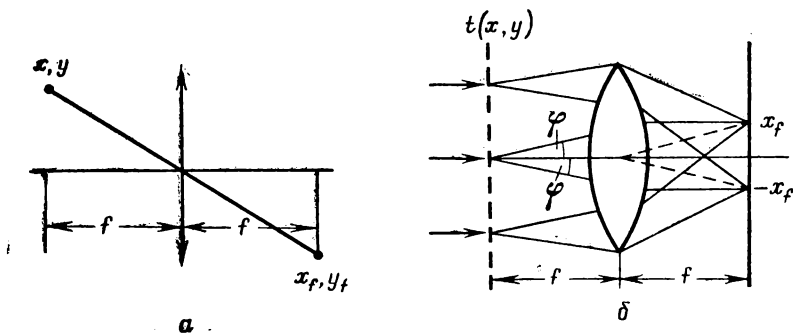


Рис. 45, а, б

Таким образом, амплитуда и фазы волны в точке с координатами  $(x_f, y_f)$  определяются преобразованием Фурье спектра пропускания предмета на частотах

$$\omega_x = k_x \frac{x_f}{f} = \frac{2\pi}{d_x}, \quad \omega_y = k_y \frac{y_f}{f} = \frac{2\pi}{d_y}.$$

Если, например,  $t(x, y) = a \cos 2\pi/dx$  и предмет освещается плоской волной, то после предмета получаются две плоские волны, идущие под углом  $\pm\varphi$  к первоначальному направлению. Углы  $\varphi$  найдем из соотношения

$$\begin{aligned} \omega_x &= k_x, \\ \pm k \sin \varphi &= \frac{2\pi}{d}, \\ \sin \varphi &= \pm \frac{\lambda}{d}. \end{aligned}$$

Соответственно в задней фокальной плоскости линзы получим два пятна в точках с координатами (рис. 45, б):

$$\pm x_f = \pm \varphi f = \pm \frac{\lambda}{d} f.$$

Если структура предмета такова, что в спектре Фурье функции пропускания предмета присутствуют высшие гармоники, то каждой гармонике будет соответствовать свое направление плоской волны после предмета, т. е.  $\omega_x = k_x = n\omega_{0x}$ ,  $\omega_y = k_y = n\omega_{0y}$ ,



и в задней фокальной плоскости линзы будут наблюдаться соответствующие максимумы, амплитуда которых определяется коэффициентами Фурье функции пропускания предмета.

3.1.3. Показать, что в плоскости, сопряженной плоскости предмета, получается изображение предмета.

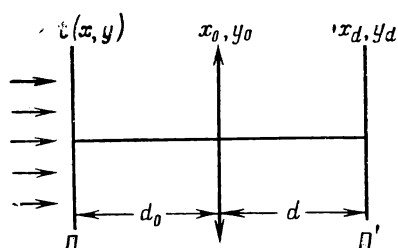


Рис. 46

Решение. Рассмотрим следующую схему (рис. 46).

Пусть  $\Pi$  — плоскость предмета, функция пропускания которого  $t(x, y)$ ,  $\Pi'$  — плоскость изображения оптической системы, сопряженная плоскости  $\Pi$ , т. е.  $1/d_0 + 1/d = 1/f$ .

Пусть линза свободна от аберраций. Согласно теории процесс формирования изображения состоит из двух этапов.

1) Волна, падающая на предмет, испытывает на нем дифракционное рассеяние, в результате чего формируется поле  $V_i$ , падающее на линзу (первая дифракция на апертуре предмета).

2) Это дифрагированное поле попадает на линзу (являющуюся фазовым объектом), испытывает фазовую задержку, в результате чего в задней фокальной плоскости формируется Фурье-образ предмета. В плоскости изображения создается дифракционное поле волны  $V'_i$ , пропущенной линзой, производится обратное преобразование Фурье и формируется изображение предмета.

Для расчета волнового поля воспользуемся приближением Френеля. Поле перед линзой

$$V_i = e^{\frac{ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_0}}{i\lambda d_0}} \iint_{\Pi} t(x, y) e^{\frac{ik \frac{x^2 + y^2}{2d_0}}{i\lambda d_0}} e^{-ik \frac{xx_0 + yy_0}{d_0}} dx dy.$$

Предполагая, что  $t(x, y)$  отлична от нуля по апертуре предмета, можем заменить пределы интегрирования на  $\pm\infty$ .

Интеграл представляет собой преобразование Фурье для функции

$$\left[ t(x, y) e^{\frac{ik \frac{x^2 + y^2}{2d_0}}{i\lambda d_0}} \right]$$

на частотах  $\omega_x = \frac{x_0}{d_0} k$ ,  $\omega_y = \frac{y_0}{d_0} k$ , запишем его в виде  $\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)$ .

Поле сразу за линзой

$$V'_i = \frac{e^{\frac{ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}}{i\lambda d_0}}}{i\lambda d_0} \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) t_i(x_0, y_0),$$

где

$t_l(x_0, y_0) = e^{-ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}}$  — функция пропускания линзы.

Это поле, ограниченное апертурой линзы, испытывает на ней дифракцию, и поле в плоскости  $\Pi'$  найдем, записав интеграл Кирхгофа—Френеля для функции  $V_l$ :

$$V_d(x_d, y_d) = \frac{e^{-ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}}}{i\lambda d} \iint_L V_l e^{ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}} \times \\ \times e^{-ik \frac{x_0 x_d + y_0 y_d}{d}} dx_0 dy_0 = \frac{e^{ik \frac{x_d^2 + y_d^2}{2d}}}{\lambda^2 d d_0} \iint_L \exp \left\{ ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \left[ \frac{1}{d_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \right] \right\} \mathcal{F}(\omega_x \omega_y) \exp \left( -ik \frac{x_0 x_d + y_0 y_d}{d} \right) dx_0 dy_0.$$

Вспомнив, что  $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = 0$ , и предположив, что поле вне апертуры линзы равно нулю и размеры линзы таковы, что она не ограничивает падающий на нее спектр, т. е.  $\mathcal{F}(\omega) = 0$  при  $|x_0| > a$ , где  $a$  — размеры линзы, увидим в интеграле обратное преобразование Фурье:

$$V_d = \frac{e^{ik \frac{x_d^2 + y_d^2}{2d}}}{\lambda^2 d d_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega_x \omega_y) e^{-ik \frac{x_0 x_d + y_0 y_d}{d}} dx_0 dy_0,$$

$$\text{но } \frac{x}{d_0} = -\frac{x_d}{d}; \quad dx_0 = d_0 \frac{\lambda}{2\pi} (d\omega_x); \quad dy_0 = \frac{d_0 \lambda}{2\pi} (d\omega_y)$$

и интеграл приобретает вид

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y = t(x, y) e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2d_0}}.$$

Так что

$$V_d = \frac{e^{ik \frac{x_d^2 + y_d^2}{2d}}}{d/d_0} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2d_0}} t(x, y).$$

Учтя соотношение между  $x$  и  $x_d$ , получим

$$|V_d| = \frac{d_0}{d} \left| t \left( -x_d \frac{d_0}{d}; -y_d \frac{d_0}{d} \right) \right|;$$

т. е. в плоскости изображения получается перевернутое, увеличенное в  $M$  раз изображение предмета:  $M = d/d_0$  — увеличение системы.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Амплитудная решетка с прямоугольной функцией пропускания  $t(x, y) = t(x)$ , периодом  $d$  и шириной щели  $b$ , освещается нормально падающим плоским пучком монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ . За решеткой расположена линза, в фокальной плоскости которой располагается набор масок.

Считая число штрихов решетки  $N \rightarrow \infty$ , найти распределение интенсивности в плоскости изображения, если маски поочередно пропускают:

- 1) нулевой максимум;
- 2)  $\pm 1$ -е максимумы;
- 3) нулевой и  $\pm 1$ -й максимумы;
- 4) нулевой и  $\pm 1$ -е максимумы.

**Решение. 1-й способ.** Распределение комплексных амплитуд в плоскости изображения определяется угловым спектром волн, дифрагированных на решетке, т. е. спектром Фурье  $S(ik_x)$  функции пропускания предмета  $t(x)$ :

$$S(ik_x) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-ik_x x} dx.$$

В нашем случае из-за бесконечности  $N$  спектр Фурье состоит из дискретного ряда гармоник:

$$S(ik_x) = a_0 + a_1 \cos(k_x x) + a_2 \cos(2k_x x) + \dots + a_m \cos(mk_x x),$$

где

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta = \frac{2\pi}{d}$$

и коэффициенты разложения

$$a_m = \frac{d}{b} \frac{\sin \frac{\pi b m}{d}}{\pi b m / d}$$

соответствуют амплитудам плоских волн, идущих в направлении

$$\sin \vartheta_m = \frac{m}{d} \lambda,$$

так что

$$\hat{A}_m = a_m \exp \left[ \pm i m \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta_m \cdot x \right] = a_m \exp \left[ \pm i \frac{2\pi}{d} m \cdot x \right].$$

В фокальной плоскости линзы каждой  $m$ -й пространственной гармонике предмета  $t(x)$  будет соответствовать максимум, положение которого относительно оптической оси линзы определится условием  $x_m = f \sin \vartheta_m = f \frac{m\lambda}{d}$ . Мы предполагаем, что  $d \gg \lambda$ , углы

дифракции малы. Для определенности положим, что предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, увеличение системы равно единице, плоскость изображения отстоит от фокальной плоскости на расстояние  $f$ .

1. Если маска в фокальной плоскости пропускает только нулевой максимум, то плоскости изображения достигает только прямопрошедшая волна, не испытывавшая дифракции на предмете. Комплексная амплитуда этой волны в плоскости изображения может быть записана в виде

$$A = a_0 e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}},$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точки в плоскости изображения. Это сферическая волна, идущая вдоль оси  $z$ ,  $I = AA^* = a_0^2$ . В плоскости изображения наблюдается равномерная освещенность.

2. Маска пропускает  $\pm 1$ -е максимумы, сформированные плоскими волнами  $A_1 = a_1 e^{ik_x x}$  и  $A'_1 = a_1 e^{-ik_x x}$ , идущими под углом  $\pm \vartheta = \lambda/d$  к оси  $z$ .

Распределение интенсивности в плоскости изображения формируется интерференцией двух сферических волн, оси которых составляют  $\pm \vartheta$  к оси  $z$ :

$$A = a_1 e^{ik_x x} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} + a_1 e^{-ik_x x} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}},$$

$$I = AA^* = 2a_1^2 \cos(2k_x x) = 2a_1^2 \cos[(4\pi/d) \cdot x].$$

Получим периодическое распределение интенсивности с периодом  $d/2$ , т. е. изображение второй пространственной гармоники предмета. Отметим, что в формировании изображения участвовали волны, дифрагировавшие под углом  $\vartheta$ , т. е. соответствующие первой гармонике предмета, тогда как на экране получили передачу не первой, а второй гармоники. Это произошло потому, что мы исключили прямопрошедшую (опорную) волну, относительно которой отсчитывались фазы дифрагированных волн.

3. В этом случае

$$A = a_0 e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} + a_1 e^{ik_x x} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}},$$

$$I = AA^* = a_0^2 + 2a_0 a_1 \cos(k_x x) (a_1^2 \ll a_0^2),$$

изображается первая гармоника с периодом  $d$ , но контраст изображения

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \cong \frac{a_1}{a_0} < 1$$

из-за наличия сильного равномерного фона ( $a_0^2$ ).

4. В формировании изображения участвуют три дифрагированные плоские волны. В плоскости изображения

$$A = a_0 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2f}} + a_1 e^{ik_x x} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2f}} + a_1 e^{-ik_x x} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2f}}.$$

Распределение интенсивности

$$I = a_0^2 + 4a_0 a_1 \cos(k_x x) + 2a_1^2 \cos(2k_x x),$$

т. е. передается изображение и первой и второй гармоник с периодами  $d$  и  $d/2$ .

Если в фокальной плоскости линзы отсутствуют диафрагмирующие маски, то наивысшая пространственная гармоника предмета  $d_{\min}$ , изображение которой формируется системой, ограничена числовой апертурой объектива, равной  $A = n \sin u$ , так что

$$\frac{\lambda}{d_{\min}} \leq n \sin u \quad \text{и} \quad d_{\min} \geq \frac{\lambda}{n \sin u}.$$

Правильная передача структуры предмета может быть получена только в том случае, если система, формирующая изображение, не искажает Фурье-спектр предмета.

Фильтрацию пространственных частот можно использовать для повышения контраста изображения. Для выявления тонкой структуры предмета нужно отфильтровать низкие частоты.

*2-й способ.* Точечные источники в фокальной плоскости линзы (первичное изображение по Аббе) являются когерентными. Изображение предмета является результатом интерференции этих точечных источников (вторичное изображение).

Интерференционная картина, получаемая в случае 2, имеет вид

$$I_{\text{интерф}} = a^2 \cos \delta,$$

где  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{l}{L} x$  ( $L$  — расстояние от источников до плоскости изображения). Пусть предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы; плоскость изображения отстоит от линзы тоже на  $2f$ , увеличение линзы равно единице:

$$l = 2f \cdot \sin \vartheta = 2f \cdot \frac{\lambda}{d}; \quad L = f,$$

$$I = a^2 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2f}{d} \lambda \cdot \frac{x}{f} \right) = a^2 \cos \left( \frac{2\pi}{d/2} x \right).$$

Изображается вторая гармоника предмета в соответствии с результатом, полученным по первому способу решения.

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Рассчитать минимальное изменение толщины стеклянной пластинки (рис. 47), которое можно наблюдать в фазоконтрастном микроскопе. Показатель преломления пластинки  $n=1,5$ .

Пластика освещается параллельным пучком монохроматического света с  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . П — предмет, П' — его изображение. Сплошной линией изображен прямой пучок, пунктиром — дифрагированные.

Решение. Пусть объект является непоглощающим, т. е. чисто фазовым. Тогда функция пропускания объекта

$$t(x, y) = e^{i\varphi(x, y)}.$$

Предположим, что ограниченностью размеров входного и выходного отверстий можно пренебречь.

Колебания толщины пластинки  $l$  соответствуют изменению фазы  $\Delta\varphi = k(n-1)l$ . Если  $\Delta\varphi \ll 1$  (а именно этот случай нас интересует), то

$$t(x, y) = e^{i\varphi(x, y)} \approx 1 + i\varphi(x, y) \quad (\varphi^2 \ll \varphi).$$

Таким образом, после образца получается интенсивная волна в первоначальном направлении и дифрагированная волна, сдвиг

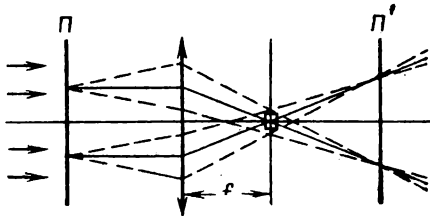


Рис. 47



Рис. 48

нутая по фазе на  $\pi/2$  относительно первой. При освещении образца плоской, нормально падающей волной амплитуды  $A_0$  комплексные амплитуды результирующего поля  $A = A_0[1 + i\varphi(x, y)]$  и интенсивность

$$I = A^2_0 [1 + \varphi^2(x, y)].$$

Так как  $\varphi \ll 1$ , то поле освещено практически однородно; с небольшими изменениями, пропорциональными не  $\varphi$ , а  $\varphi^2$ , т. е. передачи информации об изменении фазы предмета не получим. Как видно из рис. 48, результирующий вектор  $A$  почти не отличается от  $A_0$ .

Поместим в фокальной плоскости на оси линзы пластинку  $P$ , толщина которой такова, что она вносит дополнительную разность фаз в  $\pm\pi/2$ . Тогда интенсивность света в плоскости изображения

$$I = A^2_0 |i(1 + \varphi)|^2 = A^2_0 (1 + 2\varphi).$$

Амплитуды падающей и дифрагированной волн складываются в фазе или противофазе, и колебания интенсивности становятся пропорциональными  $\varphi$ . Контраст изображения

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{(1 + 2\varphi) - 1}{(1 + 2\varphi) + 1} = \frac{\varphi}{1 + \varphi} \approx \varphi.$$

Глаз не различает два светлых фона с контрастом  $C < 0,02$ . Для работы удобно пользоваться контрастом  $C = 0,1$ . Если приемлемо  $C = 0,1$ , то  $\varphi = k(n - 1)l = 0, 1$ ,

$$l = \frac{0,1}{(n - 1)k} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 150 \text{ \AA}.$$

Минимальные наблюдаемые изменения толщины ( $C < 0,1$ ) будут порядка  $(30 \div 100) \text{ \AA}$ .

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Плоская монохроматическая волна проходит одновременно через призму и отверстие в непрозрачном экране, находящемся на расстоянии  $f$  от фотопластинки (рис. 49). Призма тонкая, преломляющий угол  $\beta \ll 1$ , показатель преломления  $n$ .

Найти распределение интенсивности света  $I_x$ , возникающее за счет интерференции между «опорной» плоской волной, отклоненной призмой вниз, и волной, дифрагированной на отверстии (угол дифракции считать малым).

Решение. Комплексная амплитуда опорной волны, создаваемой призмой, имеет вид:

$$R = R_0 e^{-i\alpha x},$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)\beta.$$

Волна, дифрагированная на отверстии

$$A_x = A_0(x) e^{i\pi x^2 / \lambda f}$$

Суммарное поле  $U = R + A$  и интенсивность

$$I_x = UU^* = R_0^2 + A_0^2(x) + 2R_0 A_0(x) \cos \left[ \alpha x + \frac{\pi x^2}{\lambda f} \right].$$

Таким образом, распределение интенсивности благодаря наличию опорного пучка содержит информацию о фазе дифрагированного пучка.

**3.4.2.** Голограмма, записанная в условиях задачи 3.4.1, при условии, что интенсивность опорной волны  $I_R$  была велика по сравнению с интенсивностью волны, прошедшей через отверстие ( $I_A \ll I_R$ ), освещается нормально падающей плоской волной  $B = B_0 \exp(ikz)$ . Длина волны та же, что и при записи. Проследить за процессом восстановления изображения точечного отверстия.

Решение. Распределение интенсивности на фотопластинке имеет вид (см. задачу 3.4.1):

$$I_x = R_0^2 + A_0^2(x) + 2R_0A_0(x) \cos \left[ \alpha x + \frac{\pi x^2}{\lambda f} \right].$$

После проявления фотопластинки ее пропускание  $t(x)$  будет иметь вид:  $t(x) \sim [I(x)]^{-\gamma/2}$ ,

$$t(x) \sim t_0 - \gamma' \left\{ A_0^2(x) + A_0(x) R_0 \exp \left[ i \left( \alpha x + \frac{\pi x^2}{\lambda f} \right) \right] + R_0 A_0(x) \exp \left[ -i \left( \alpha x + \frac{\pi x^2}{\lambda f} \right) \right] \right\}$$

(уравнение голограммы Габора).

При освещении голограммы нормально падающей плоской волной с комплексной амплитудой  $B_0 e^{ikz}$  за голограммой получится поле  $U = t(x) B_0 e^{ikz}$ :

$$U = [t_0 B_0 - \gamma' B_0 A_0^2(x)] e^{ikz} - \gamma' A_0(x) B_0 e^{ikz} e^{i \left( \alpha x + \frac{\pi x^2}{\lambda f} \right)} - \gamma' A_0(x) B_0 e^{ikz} e^{i \left( -\alpha x - \frac{\pi x^2}{\lambda f} \right)}.$$

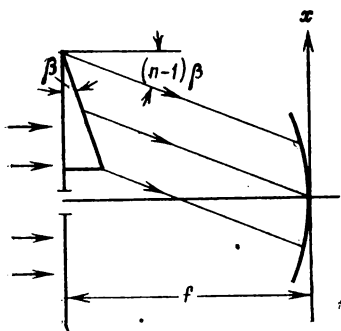


Рис. 49

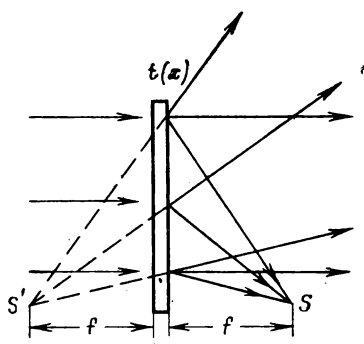


Рис. 50

Первый член соответствует волне, идущей в направлении падающей, но слегка неравномерно (из-за  $A_0^2(x)$ , которое  $\ll R_0^2$ ), ослабленной. Второй описывает волну, представляющую комбинацию плоской волны, отклоненной вверх, и сферической расходящейся волны с фокусом  $f$ . Третий — плоскую волну, отклоненную вниз, и сферическую сходящуюся волну с фокусом  $f$ . Таким образом, в результате пропускания через голограмму плоской волны восстанавливаются первоначальное волновое поле — плоская опорная и сферическая предметная волны. Изображение точечного источника восстанавливается дважды: в виде действительного ( $S$ ) и мнимого ( $S'$ ) изображений (рис. 50).



**3.4.3.** Голограмма точки, записанная с опорной волной  $\bar{R} = R_0 e^{i\varphi_2}$  (длина волны  $\lambda_1$ ), освещается точечным источником  $C$  ( $x_c, y_c, z_c$ ), дающим монохроматический свет длины волны  $\lambda_2$ . Найти положение восстановленных изображений.

Решение. Изменения интенсивности света, падающего на голограмму, определяются интерференционными членами  $RA^* + R^*A$ . Так как экспонирование фотопластинки производится на линейном участке характеристической кривой, то вариации функции пропускания пластинки  $t(x_2, y_2)$  определяются вариациями интенсивности света. При освещении голограммы волной  $B = B_0 e^{i\varphi_b}$  комплексная амплитуда дифрагированных волн в плоскости голограммы имеет вид

$$V_{z=0}(x_2, y_2, 0) = BRA^* + BR^*A,$$

$$R = R_0 e^{i\varphi_r}, \quad A = A_0 e^{i\varphi_a}, \quad B = B_0 e^{i\varphi_b},$$

$$V(x_2, y_2, 0) = A_0 B_0 R_0 [\exp i(\varphi_b + \varphi_r - \varphi_a) + \exp i(\varphi_b - \varphi_r + \varphi_a)].$$

Введем обозначения  $\varphi_R = \varphi_b + \varphi_r - \varphi_a$  и  $\varphi_V = \varphi_b - \varphi_r + \varphi_a$  и положим  $\varphi_b = 0$  в начале координат, тогда  $\varphi_b(x_2, y_2)$  в некоторой точке  $(x_2, y_2)$  в плоскости голограммы приблизительно равна

$$\begin{aligned} \varphi_b(x_2, y_2) &= \frac{2\pi}{\lambda_2} \left[ \frac{(x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2}{2z_c} \right] \cong \\ &\cong \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{1}{2z_0} (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2x_c - 2y_2y_c) \right]. \end{aligned}$$

Для  $\varphi_V(x_2, y_2)$  получим

$$\begin{aligned} \varphi_V(x_2, y_2) &= \frac{2\pi}{\lambda_2} \left[ \frac{1}{2z_c} (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2x_c - 2y_2y_c) \right] + \\ &+ \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{1}{2z_1} (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2x_1 - 2y_2y_1) \right] - \\ &- \frac{2\pi}{\lambda_1} \left[ \frac{2}{2z_r} (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2x_r - 2y_2y_r) \right]. \end{aligned}$$

Выражение для  $\varphi_R$  записывается аналогично.

Мы предполагаем масштаб голограммы при записи и восстановлении неизменяемым. Обозначим  $\lambda_2/\lambda_1 = \mu$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_V(x_2, y_2) &= \frac{\pi}{\lambda_2} \left[ (x_2^2 + y_2^2) \left( \frac{1}{z_c} + \frac{\mu}{z_1} - \frac{\mu}{z_r} \right) - 2x_2 \left( \frac{x_c}{z_c} + \frac{\mu x_1}{z_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu x_r}{z_r} \right) - 2y_2 \left( \frac{y_c}{z_c} + \frac{\mu y_1}{z_1} - \frac{\mu y_r}{z_r} \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_R(x_2, y_2) &= \frac{\pi}{\lambda_2} \left[ (x_2^2 + y_2^2) \left( \frac{1}{z_c} - \frac{\mu}{z_1} + \frac{\mu}{z_r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2x_2 \left( \frac{x_c}{z_c} - \frac{\mu x_1}{z_1} + \frac{\mu x_r}{z_r} \right) - 2y_2 \left( \frac{y_c}{z_c} - \frac{\mu y_1}{z_1} + \frac{\mu y_r}{z_r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если голограмма действительно восстанавливает изображение точечных источников, то  $\varphi_V$  и  $\varphi_R$  должны быть фазами сферических волн в плоскости голограммы, т. е. в нашем приближении иметь вид

$$\varphi(x_2, y_2) = \frac{2\pi}{\lambda_2} \left[ \frac{1}{2z_3} (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2x_3 - 2y_2y_3) \right], \quad (2)$$

где  $z_3$  — расстояние от голограммы до плоскости изображения,  $x_3, y_3$  — координаты восстановленного источника.

Приравнявая коэффициенты в (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{z_3} \right)_V &= \frac{1}{z_c} + \frac{\mu}{z_1} - \frac{\mu}{z_r}; \\ (x_3)_V &= \left( \frac{x_c}{z_c} + \frac{\mu x_1}{z_1} - \frac{\mu x_r}{z_r} \right) z_3; \\ (y_3)_V &= \left( \frac{y_c}{z_c} + \frac{\mu y_1}{z_1} - \frac{\mu y_r}{z_r} \right) z_3; \\ \left( \frac{1}{z_3} \right)_R &= \frac{1}{z_c} - \frac{\mu}{z_1} + \frac{\mu}{z_r}; \\ (x_3)_R &= \left( \frac{x_c}{z_c} - \frac{\mu x_1}{z_1} + \frac{\mu x_r}{z_r} \right) z_3; \\ (y_3)_R &= \left( \frac{y_c}{z_c} - \frac{\mu y_1}{z_1} + \frac{\mu y_r}{z_r} \right) z_3. \end{aligned}$$

**3.4.4.** Осевая голограмма записана с плоским опорным пучком длины  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ . Определить локальную пространственную частоту  $\nu(\rho)$  интерференционных полос на расстоянии  $\rho = 1 \text{ см}$  от оси голограммы. Расстояние между предметом и фотопластинкой  $z_1 = 1 \text{ м}$ .

Решение. В данном случае и предмет и источник опорной волны лежат на оси  $z$

$$(x_1 = x_r = y_1 = y_r = 0).$$

Считая, что на оси фазы опорной и предметной волн совпадают, рассчитаем разность фаз этих волн в точке  $(x_2, y_2)$  фотопластины. Пользуясь параксиальным приближением, можно записать

$$\varphi_r - \varphi_a = \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z_1} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\rho^2}{2z_1} \frac{2\pi}{\lambda},$$

или разность хода  $\Delta = \frac{\rho^2}{2z_1}$ , т. е. интерференционные полосы представляют собой кольца. Максимумы интенсивности соответствуют  $\Delta\varphi = 2\pi m$ , т. е.  $\rho^2 = m\lambda z_1$ . Изменение интенсивности происходит по закону.

$$2R_0 A_0 \cos \Delta\varphi.$$

Так как  $\Delta\varphi$  зависит от координат, то пространственная частота  $\nu$  изменения интенсивности тоже зависит от координат. Пространственная частота  $\nu$  равна деленной на  $2\pi$  пространственной скорости изменения фазы интерференционной картины в точке  $(x_2, y_2)$ :

$$\nu(\rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} (\Delta\varphi) \frac{1}{2\pi} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\Delta}{\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho^2}{2\lambda z_1} \right) = \rho / \lambda z_1. \quad (1)$$

Для направления  $x_2$

$$\nu(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\rho^2}{2\lambda z_1} \right) = \frac{x_2}{\lambda z_1}.$$

Подставляя данные задачи, получим

$$\nu(\rho) = \frac{1}{6 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} = 165 \text{ полос/см.}$$

*Замечание.* Из (1) видно, что частота  $\nu$  растет по мере удаления от оси голограммы и может достигнуть величины  $\nu_{\max}$ , равной предельной частоте, которую можно зарегистрировать на фотопластинке. Величина  $\rho_{\max} = \nu_{\max} \cdot \lambda z_1$  определяет размеры голограммы, которую можно записать на пластинку с данной разрешающей способностью  $\nu_{\max}$ .

3.4.5. Голограмма точки  $(x_1, 0_1 - z_1)$  записана на схеме Лейта и Упатниекса с помощью аксиальной плоской волны, идущей

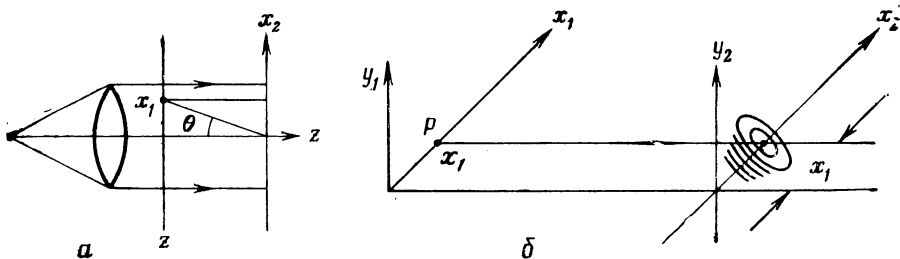


Рис. 51, а, б

вдоль  $z$  (рис. 51,а). Определить пространственную частоту интерференционных полос на голограмме в точке  $(x_2, y_2)$ .

Решение. В точке  $(x_2, y_2)$  разность хода опорной и предметной волн равна

$$\Delta = - \frac{x^2 + y^2}{2z_1} + x_2 \sin \theta$$

$$(x_r = y_r = y_1 = 0; z_r = \infty),$$

где  $\sin \theta = \frac{x_1}{z_1}$  и  $\theta$  — средний угол между опорной и предметной волнами. Центр интерференционных колец (рис. 51,б) лежит в точке  $x_2 = x_1$ .

Частота полос  $\nu(x_2) = -\frac{x_2}{\lambda z_1} + \frac{x_1}{\lambda z_1} = \frac{x_1 - x_2}{\lambda z_1}$ . Таким образом, в точке  $x_2 = 0$  частота полос  $\nu = \frac{x_1}{\lambda z_1}$ .

3.4.6. Найти положение изображений при восстановлении с волной, тождественной опорной. Запись произведена симметричными относительно нормали плоским опорным и сферическим предметным пучками (рис. 52).

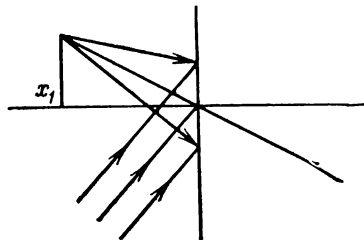


Рис. 52

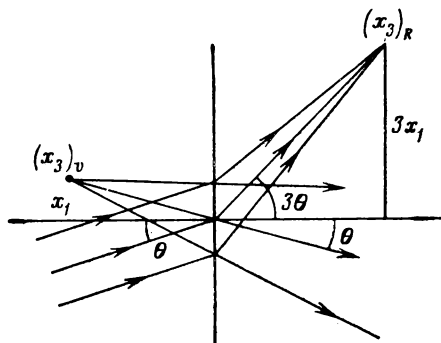


Рис. 53

Решение. 1. Воспользуемся геометрическими соотношениями, полученными в задаче 3.4.3.

$$\text{У нас } z_c = z_r = \infty$$

$$x_c/z_c = -\theta_1; \quad x_r/z_r = -\theta; \quad x_1/z_1 = +\theta;$$

$$(z_s)_v = z_1; \quad (x_s)_v = z_s(\theta_c + \theta_1 - \theta_r) = z_1\theta = x_1;$$

$$(z_s)_R = -z_1; \quad (x_s)_R = z_s(\theta_c - \theta_1 + \theta_r) = -3z_1\theta = 3x_1.$$

2. Определим структуру волнового поля сразу за голограммой. Пусть

$$R = R_0 e^{i\alpha x},$$

$$A = A_0 e^{-i\alpha x} e^{i \frac{x^2 + y^2}{2z_1}},$$

$$B = B_0 e^{i\alpha x} = R_0 e^{i\alpha x}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \theta.$$

Положим  $R_0 = A_0 = 1$

$$\begin{aligned} t(x_2, y_2) &\approx RA^* + R^*A = e^{i\alpha x} e^{i\alpha x} e^{-i \frac{x^2 + y^2}{2z_1}} + \\ &+ e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha x} e^{i \frac{x^2 + y^2}{2z_1}}, \end{aligned}$$

$$V(x_2, y_2) = t(x_2, y_2) \hat{B} = t(x_2, y_2) \hat{R} = \\ = e^{i3\alpha x} e^{-i \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z_1}} + e^{-i\alpha x} e^{i \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z_1}}.$$

Первое слагаемое дает сходящуюся волну, идущую под углом  $3\theta$  к оси, второе дает расходящуюся волну, идущую под углом  $(-\theta)$  к оси (рис. 53), которые и формируют действительное  $(X_3)_R$  и мнимое  $(X_3)_V$  изображения точки.

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Голограмма записана с нормально падающим плоским опорным пучком с длиной волны  $\lambda_1$ . Предмет находился на расстоянии  $z_1 = 10$  см от пластинки. Восстанавливающая волна имеет  $\lambda_2 = 10\lambda_1$  и идет вдоль оси. Определить угловое и поперечное увеличение при восстановлении. Масштаб голограммы при записи и восстановлении неизменен.

**Решение.** Воспользуемся геометрическими соотношениями, полученными в 3.4.3, и рассчитаем угловое и поперечное увеличения. У нас  $\mu = \lambda_2/\lambda_1 = 10$ ;  $x_c = x_r = y_c = y_r = 0$ , поперечное увеличение  $N = \frac{dx_3}{dx_1}$ , угловое увеличение  $\gamma_1 = \frac{d(x_3/z_3)}{d(x_1/z_1)}$ . Получим

$$N_V = \left(1 - \frac{z_1}{z_r} + \frac{z_1}{z_c} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-1} = 1; \\ N_R = \left(1 - \frac{z_1}{z_r} + \frac{z_1}{z_c} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-1} = 1, \quad |\gamma| = \mu = 10, \\ x_3 = \mu x_1 z_3 / z_1 = \mu x_1 z_3 / \mu z_3 = x_1, \\ z_3 = z_1 / \mu.$$

Таким образом, поперечное увеличение равно единице, а плоскость изображения расположена в десять раз ближе к голограмме, чем предмет.

### 6-й тип задач (3.6)

**3.6.1.** Внеосевая голограмма Френеля записана на фотопластинке с разрешающей способностью 100 штрихов/мм. Определить максимальные размеры предмета, который можно зарегистрировать на голограмме размером  $x_2 = 0,1$  мм, если  $z_1 = 1$  м,  $\lambda = 5000$  Å.

**Решение.** Разрешающая способность пластинки определяет максимальную пространственную частоту интерференционных полос:

$$v_{\max}(x_2) = N = 100 \text{ мм}^{-1}.$$

В данном случае (см. задачу 3.4.4)

$$v(x_2) = -\frac{x_2}{\lambda z} + \frac{x_1}{\lambda z},$$

$$v_{\max} = [-(x_2)_{\max} + (x_1)_{\max}]/\lambda z.$$

Проанализируем вклад слагаемых:

$$x_2/\lambda z = \frac{0,1}{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,2 \text{ мм}^{-1} \ll N,$$

т. е. главную роль играет  $(x_1)_{\max}/\lambda z \approx N$ . Отсюда  $(x_1)_{\max} = N\lambda z = 50 \text{ мм}$ . Таким образом, участки предмета, находящиеся на расстояниях  $> 50 \text{ мм}$  от оси, на голограмме зарегистрированы не будут.

**3.6.2.** Осевая голограмма Френеля регистрируется на фотопластинке с разрешающей способностью  $0,5 \text{ мкм}$ . Оценить расстояние между двумя точками предмета, которые можно разрешить.

**Решение.** Частота интерференционных полос  $v(x_2)$  на голограмме  $v(x_2) = x_2/\lambda z_1$  (см. задачу 3.4.4). Фотопластинка может зарегистрировать только те кольца, ширина которых будет больше  $0,5 \text{ мкм} = 1/N$ , т. е.  $v_{\max} \leq N$ . Отсюда  $(x_2)_{\max} \leq N\lambda z_1$  и определит размеры голограммы, записанной на пластинке. При восстановлении изображения голограмма эквивалентна действию зонной пластинки или линзе определенной апертуры:

$$A = \sin u = (x_2)_{\max}/z.$$

Согласно критерию разрешения

$$\delta x_1 \leq \lambda / \sin u,$$

$$\delta x_1 \leq \frac{\lambda z}{(x_2)_{\max}} = \frac{\lambda z}{N\lambda z} = \frac{1}{N} = 5 \cdot 10^3 \text{ Å}.$$

и не зависит от  $\lambda$ .

**3.6.3.** Сравнить разрешающую способность голограммы Фурье и голограммы Френеля. Угловые размеры голограммы  $x_2/z_1 = 10^{-3}$ , а углы дифракции составляют  $\sim 10^\circ$ .

**Решение.** Разрешающая способность  $\delta x_1$  осевой голограммы Френеля определяется угловой апертурой голограммы  $A$ .

$$\delta x_1 \leq \lambda / A \cong \lambda \cdot 10^3, \text{ где } A = \frac{(x_2)_{\max}}{z} = 10^{-3}.$$

В голограмме Фурье пространственные частоты голограммы  $v(x_2)$  однозначно связаны с координатами объекта  $x_1$  (рис. 54). Действительно, разность фаз равна

$$\varphi_r - \varphi_a = -\frac{2\pi}{\lambda_1} \left( \frac{x_r}{z_1} - \frac{x_1}{z_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_1} (\theta_1 - \theta_2) x_2$$

$$(\theta_2 < 0),$$

$$\nu(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) = \frac{x_1 - x_2}{z_1 \lambda} = \text{const},$$

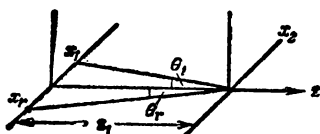


Рис. 54

т. е. интерференционные полосы имеют одинаковую частоту по всему полю, как в схеме Юнга. Эта картина соответствует интерференции двух плоских волн, идущих под углом  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  друг к другу. Частота полос  $\nu(x)$  однозначно связана с углом  $\theta$ .

При дифракции света на предмете каждой пространственной гармонике  $f_x$  функции пропускания предмета соответствует определенное направление плоских дифрагированных волн, так что

$$f_x = \frac{1}{d} = \frac{\sin \theta}{\lambda}.$$

Таким образом, наименьший период, который можно зарегистрировать на фотопластинке, определяется углом дифракции  $\theta$ , а не размерами голограммы, как в схеме Френеля.

Сравнивая  $\delta x$  и  $d_{\min}$ , получим

$$\frac{\delta x}{d_{\min}} = \frac{\lambda z}{2x_{2\max}} \cdot \frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{10^3}{2} \sin \theta.$$

При  $\theta = 10^\circ$   $\frac{\delta x}{d_{\min}} \approx 100$  и растет с ростом угла дифракции.

*Примечание.* Проведенный расчет пригоден только при малых углах  $\theta$ .

### 7-й тип задач (3.7)

**3.7.1.** На фотопластинке зарегистрирована осевая голограмма точки. Негатив освещается волной, тождественной опорной. Показать, что в результате дифракции падающего света на голограмме образуются два изображения точечного источника. Найти закон распределения интенсивности света в них.

Решение. Так как пластинка проэкспонирована в области линейного участка характеристической кривой, то функция пропускания пластинки  $t(x, y)$  имеет вид

$$t(x_2, y_2) = t_0 - \beta' \cos \frac{kp^2}{2z_1},$$

где  $z_1$  — расстояние от точечного предмета до голограммы и

$$\rho^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Голограмма подобна зонной пластинке. Осветим голограмму параллельным пучком единичной амплитуды с той же длиной волны  $\lambda$ , что и при записи. В плоскости  $x_3, y_3$  рис. 55 на расстоянии  $z_3$  от голограммы распределение комплексных амплитуд найдем, рассматривая дифракцию на голограмме. В приближении Френеля получим

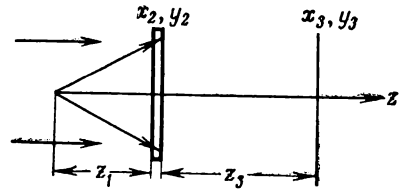


Рис. 55

$$V(x_3, y_3) = \frac{e^{ikz_3}}{i\lambda z_3} e^{ik \frac{x_3^2 + y_3^2}{2z_3}} \iint_{-\infty}^{\infty} t e^{ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z_3}} e^{-ik \frac{x_2 x_3 + y_2 y_3}{z_3}} dx_2 dy_2.$$

Изображение должно быть на оси  $z$ . В точках на оси ( $x_3 = y_3 = 0$ )

$$V(0, 0) = \frac{e^{ikz_3}}{i\lambda z_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ t_0 - \beta' \cos \frac{k\rho^2}{2z_1} \right] e^{ik \frac{x_3^2 + y_3^2}{2z_3}} dx_2 dy_2.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$V(0, 0) = \frac{e^{ikz_3}}{i\lambda z_3} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ t_0 - \frac{\beta'}{2} \left[ \underbrace{e^{ik \frac{\rho^2}{2z_1}} + e^{-ik \frac{\rho^2}{2z_1}}}_A \right] \right\} e^{ik \frac{\rho^2}{2z_3}} d(\rho^2).$$

Если на голограмме зарегистрировано  $N$  колец, т. е. радиус зонной пластинки  $\rho_0$ , то

$$V(0, 0) = \frac{e^{ikz_3}}{i\lambda z_3} \pi \left[ \int_0^{\rho_0} t_0 e^{ik \frac{\rho^2}{2z_3}} d(\rho^2) - \frac{\beta'}{2} \int_0^{\rho_0} A e^{ik \frac{\rho^2}{2z_3}} d(\rho^2) \right].$$

Первый интеграл дает

$$I = 4t_0 \sin^2 \frac{k\rho_0^2}{4z_3} \text{ (см. задачу 3.1.1 разд. V).}$$

Это распределение интенсивности формируется плоской волной, прошедшей через отверстие радиуса  $\rho_0$  на достаточно большом расстоянии от отверстия.

Второй интеграл запишем в виде

$$\frac{\beta'}{2} \int_0^{\rho_0} \exp \left[ ik \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3} \right) \right] d(\rho^2).$$



В результате интегрирования получим:

$$-\frac{\beta'}{4z_3} k \rho_0^2 \frac{\sin \left[ k \frac{\rho_0^2}{4} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3} \right) \right]}{\frac{k \rho_0^2}{4} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3} \right)} \quad (\text{вторая волна}),$$

$$-\frac{\beta'}{4z_3} k \rho_0^2 \frac{\sin \left[ k \frac{\rho_0^2}{4} \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3} \right) \right]}{\frac{k \rho_0^2}{4} \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3} \right)} \quad (\text{третья волна}).$$

Амплитуда второй волны имеет максимум при  $\frac{k \rho_0^2}{4} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3} \right) = 0$ , т. е. при  $z_3 = -z_1$ . Так как  $z_1$  отрицательно, то  $z_3 > 0$ .

Эта сходящаяся волна дает действительное изображение точечного источника при  $z_3 = -z_1$ .

Третья волна имеет максимум в точке  $z_3 = z_1$  и дает мнимое изображение (расходящаяся волна). Ширина максимума  $\Delta z_3 = 2\lambda / \sin^2 \alpha$ , где  $\sin \alpha = \rho_0 / z_3$ . При  $\rho_0 \rightarrow \infty$   $\Delta z_3 \rightarrow 0$ . Таким образом, четкое изображение точки получим только от бесконечно большой голограммы.

Если при восстановлении используется волна  $\lambda_2$  ( $k' = 2\pi / \lambda_2$ ), то максимумы сдвигаются в точку с  $z_3 = z_1 \lambda_1 / \lambda_2$ , и если  $\lambda_2 > \lambda_1$ , изображение приближается к голограмме.

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Проволочная сетка, ячейки которой имеют форму квадратов, проектируется собирающей линзой на экран. В задней фокальной плоскости линзы помещена узкая щель. Как будет меняться картина на экране при вращении щели вокруг главной оптической оси? Как изменится картина при изменении ширины щели?

4.2. Предмет освещается нормально падающей волной длины  $\lambda$  единичной амплитуды. За предметом распространяются плоская волна в первоначальном направлении интенсивности  $I_0$  и четыре дифрагированные волны под углами  $\pm \varphi$ ,  $\pm 2\varphi$  к оси. Опишите функцию пропускания предмета.

4.3. Почему нельзя наблюдать фазовый объект в обычном микроскопе?

4.4. Чем объяснить, что фазовый объект становится видимым, если убрать прямой пучок?

4.5. Почему применение фазовой пластинки  $\pm \lambda / 4$  увеличивает контраст изображения фазовых объектов? Можно ли пользоваться этим методом для объекта, дающего низкочастотные вариации фазы?

4.6. Могут ли получиться распространяющиеся дифрагированные волны от предмета, частота пространственных гармоник которого  $> 1/\lambda$ ?

4.7. В фокальной плоскости объектива получается два пятна, расположенных по вертикали на расстоянии  $l$  друг от друга. Фокусное расстояние линзы  $f$ . Каков характер распределения интенсивности на расстоянии  $d_0 > f$  за линзой? Как будет изменяться это распределение, если диафрагмой уменьшить размеры освещаемой части предмета?

4.8. В чем состоит отличие изображения предмета, если отфильтровать все волны, формирующие максимумы  $(+)$  порядков, оставив 0 и  $(-)$  порядки и оставив только  $(-)$  порядки?

4.9. Как можно выявить мелкие детали предмета, сделав их более контрастными?

4.10. Запишите выражение для комплексной амплитуды предметной волны в квадратичном приближении в плоскости голограммы  $(x_2, y_2, 0)$  если предмет — точка с координатами  $(x, 0, -z)$ . То же для предмета  $(-x, 0, -z)$ .

4.11. При освещении осевой голограммы точки плоской волной за голограммой восстанавливаются две сферические волны, формирующие изображение предмета, и одна плоская. Почему при освещении амплитудной зонной пластинки плоской волной наблюдается целый ряд действительных и мнимых изображений?

4.12. Как будут выглядеть восстановленные изображения, если при записи осевой голограммы на фотопластинку амплитуда опорного пучка была близка к амплитуде предметной волны?

4.13. Как (качественно) будет изменяться восстановленное изображение, если уменьшить размер голограммы?

4.14. За счет каких факторов можно получить поперечное увеличение изображения? Можно ли получить  $V > 1$  в схеме с осевыми пучками?

4.15. Чем определяется разрешающая способность голографического метода формирования изображения?

4.16. Какие требования предъявляются к регистрирующей среде?

4.17. Каким требованиям должен удовлетворять источник света для записи голограммы и при восстановлении волнового фронта?

4.18. Что собой представляет голограмма Френеля точечного источника? Как изменится голограмма, если источник, расположенный ранее на одной оси с предметом, сдвинуть вдоль оси  $x$ ? Вдоль оси  $y$ ?

4.19. Голограмма Фурье точечного источника зарегистрирована на фотопластинке и освещается нормально падающей плоской волной. Каков характер восстановленных волн? Как изменится картина волнового поля, если при записи голограммы амплитуды опорной и предметной волн были примерно одинаковы?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Для изучения структуры фазового объекта в видимом свете используется поглощающая фазовая пластинка с коэффициентом поглощения по интенсивности  $\alpha = \frac{I_{\text{пад}}}{I_{\text{прош}}} = 10^3$ . Оценить минимальные вариации толщины прозрачной пластинки ( $n \approx 1,5$ ), которые дают контраст  $C=0,1$ .

Ответ. Можно заметить изменение разности хода

$$\Delta \approx 1,5\text{\AA}, \text{ где } \Delta = (n - 1)l.$$

5.2. Изображение предмета формируется с помощью низкоапертурного объектива. В фокальной плоскости объектива наблюдается пять точечных максимумов, расположенных вдоль прямой и имеющих примерно равные интенсивности. Считая начальные фазы дифрагированных волн одинаковыми, определить характер распределения интенсивности в плоскости изображения. Освещение когерентное, длина волны  $\lambda$ .

Ответ. Изображаются первые четыре пространственные гармоники предмета с относительными интенсивностями 4:3:2:1.

5.3. Как изменится разрешающая способность объектива телескопа, если центральную часть его закрыть круглым экраном, диаметр которого мало отличается от диаметра объектива?

Указание. При расчете распределения интенсивности круглые экран и отверстие можно заменить квадратными.

Ответ. Увеличится приблизительно в два раза.

5.4. Фотопластинка, проэкспонированная в области линейного участка характеристической кривой, имеет коэффициент пропускания  $t(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{d} x$  при  $|x| \leq L$ . Пластинка освещается плоской волной, распространяющейся под углом  $\theta$  в плоскости  $xz$ . Найти спектр Фурье амплитуд света, пропущенного решеткой.

Ответ. После решетки распространяются три волновых пакета шириной  $\Delta\varphi \approx \lambda/2L$  в направлении: 1)  $\sin \varphi_1 = \sin \theta$  и 2)  $\sin \varphi_{2,3} = \sin \theta \pm \lambda/d$ .

5.5. Определить минимальное разрешаемое расстояние  $\delta x$  в микроскопе при наилучших условиях освещения в следующих случаях:

- 1) используется безиммерсионный объектив с числовой апертурой  $A=0,9$ ;
- 2) тот же объектив с масляной иммерсией ( $n=1,6$ ), в этих двух случаях наблюдения визуальные ( $\lambda=5500 \text{\AA}$ );
- 3) тот же объектив, но проводится фотографирование в ультрафиолетовых лучах.

Ответ. 1)  $\delta x > 6 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ ; 2)  $\delta x > 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ ; 3)  $\delta x > 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ .

5.6. Каково должно быть увеличение микроскопа, чтобы мож-

но было полностью использовать разрешающую способность его объектива?

Ответ.  $N \geq N_{\text{норм}} = \frac{2AL}{d}$ , где  $L$  — расстояние наилучшего видения,  $A$  — числовая апертура объектива,  $d$  — диаметр зрачка глаза,  $N_{\text{норм}}$  — нормальное увеличение. При  $N > N_{\text{норм}}$  разрешающая сила микроскопа не повышается, а яркость изображения падает.

5.7. Каково должно быть увеличение зрительной трубы, чтобы можно было полностью использовать разрешающую способность ее объектива?

Ответ.  $N_{\text{норм}} = D/d$ , где  $D$  — диаметр объектива,  $d$  — диаметр зрачка глаза.

5.8. Подсчитать разрешающую способность зрительной трубы с объективом диаметром 5 см. При каком увеличении можно полностью использовать разрешающую способность этой трубы? Диаметр зрачка глаза 0,5 см,  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ .

Ответ.  $\Delta\varphi = 2,7''$ ,  $N \geq N_{\text{норм}} = 10$ .

5.9. Показать, что в волновом поле дифрагированных волн на расстояниях от предмета  $d_0 \gg \lambda$  не содержится никакой информации о пространственных частотах предмета  $f$ , больших чем  $1/\lambda$ .

Указание. Записать волновое поле от предмета в плоскости  $z = d_0$  и учесть связь между пространственными частотами

$$f_x = \frac{\cos \alpha}{\lambda}; \quad f_y = \frac{\cos \beta}{\lambda}; \quad f_z = \frac{\cos \gamma}{\lambda}.$$

5.10. Предмет, функция пропускания которого  $t(x, y)$ , расположен вплотную к тонкой линзе с фокусным расстоянием  $f$ . Найти распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости линзы.

Ответ. Если линза не ограничивает размеры исходного поля, распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости с точностью до квадратичного фазового множителя совпадает с преобразованием Фурье функции  $t(x, y)$  по пространственным частотам

$$\omega_x = 2\pi \frac{x_f}{\lambda f}; \quad \omega_y = 2\pi \frac{y_f}{\lambda f},$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы.

Указание. Воспользоваться интегралом Кирхгофа—Френеля и учесть функцию пропускания линзы в квадратичном приближении.

5.11. Определить разрешающую способность фотопластинки, могущей зарегистрировать интерференционные полосы на расстоянии 1 см от центра осевой голограммы. Расстояние от предмета до пластинки  $z_1 = 1 \text{ м}$ ,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ .

Ответ. 1666 линий на см.

**5.12.** Какова должна быть разрешающая способность фото-пластинки, чтобы в изображении, восстановленном с помощью голограммы Френеля, можно было разрешить две точки, находящиеся на расстоянии  $0,1 \text{ мкм}$ ?  $\lambda = 6300 \text{ Å}$ . Есть ли такие пластинки?

Ответ.  $N \geq 5000$  линий на мм. Лучшие фотоэмульсии «Кодак» имеют  $2000$  линий на мм.

**5.13.** Голограмма Фурье регистрируется на фотопластинку с разрешением  $100$  штрихов/мм. Определить максимальные размеры предмета, который можно зарегистрировать на голограмме.  $z_1 = 1 \text{ м}$ ,  $\lambda = 6300 \text{ Å}$ .

Ответ.  $x_1 = v_{\max} z_1 \lambda = 63 \text{ мм}$ .

**5.14.** Голограмма записана с осевым опорным плоским пучком и сферической предметной волной  $(-x_1, 0, -z_1)$ . Восстанавливающая волна тождественна опорной. Определить положение восстановленных изображений.

Ответ. Мнимое изображение получается в той же точке, что и предмет  $(-x_1, 0, -z_1)$ ; действительное — в точке  $(-x_1, 0, +z_1)$ .

**5.15.** Найти волновое поле восстановленных изображений, если голограмма записана с плоским опорным и сферическим предметными пучками, симметричными относительно нормали к пластинке, а восстанавливающая волна тождественна с комплексно-сопряженной опорной волной. Где находятся действительное и мнимое изображения?

Ответ. Получается сходящаяся сферическая волна, идущая под углом падения опорной волны  $\theta$ , и расходящаяся волна под углом  $3\theta$ . Действительное изображение  $(-x_1, z_1)$ , мнимое —  $(-3x_1, -z_1)$ .

## **Раздел VIII**

# **ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА И КРИСТАЛЛООПТИКА**

### **1. Теоретический материал**

Изотропные и анизотропные среды. Тензорный характер диэлектрической проницаемости в анизотропной среде. Система диэлектрических осей. Главные значения диэлектрической проницаемости. Нормальная и лучевая скорости света в кристалле. Главные значения показателя преломления в анизотропной среде. Формула Френеля для нормальной скорости света в кристалле. Обыкновенный и необыкновенный лучи и их свойства. Положительные и отрицательные кристаллы. Одноосные и двуосные кристаллы. Построение Гюйгенса для направлений распространения света в кристаллах. Устройства для получения поляризованных лучей. Призма Николя. Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса. Интерференция поляризованных лучей. Применение пластинки в «1/4 волны» и компенсатора Бабиня для изменения характера поляризации света и для анализа эллиптически поляризованного света. Поворот плоскости поляризации в кристаллах. Кинематическая теория Френеля для поворота плоскости поляризации в кристаллической среде.

### **2. Вопросы к теоретическому материалу**

2.1. В чем заключается явление двойного лучепреломления?

2.2. Каковы свойства обыкновенного и необыкновенного лучей?

2.3. Напишите систему уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

2.4. Какова связь между компонентами векторов электрической индукции и напряженности электрического поля в анизотропной (кристаллической) среде?

2.5. Что такое система диэлектрических осей?

2.6. Что такое главные скорости распространения света в кристаллах?

2.7. Дайте определение главных показателей преломления кристалла.

2.8. Что такое положительные и отрицательные кристаллы?

2.9. Дайте определение оптической оси кристалла.

**2.10.** Что такое главные направления в кристалле?

**2.11.** Каким образом устроена призма Николя? Для каких целей она применяется в оптических устройствах?

**2.12.** Сформулируйте закон Малюса.

**2.13.** Напишите формулу для разности фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами после прохождения кристаллической пластинки толщиной  $h$ .

**2.14.** При каких условиях на выходе из кристаллической пластинки получается свет, поляризованный по левому (правому) кругу, если амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы?

**2.15.** Каково действие пластинки в « $1/4$  волны»?

**2.16.** Как устроен компенсатор Бабиня? С какой целью он используется в оптических устройствах?

**2.17.** Каким образом объясняется явление вращения плоскости поляризации в кинематической теории Френеля для этого явления?

**2.18.** Сформулируйте основную закономерность в явлении поворота плоскости поляризации.

**2.19.** Что такое вращательная способность кристалла? Каким образом она связана с разностью показателей преломления для лево- и правокругополяризованных лучей?

### **3. Основные типы задач и решений**

#### **а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**

**3.1. (1-й тип).** Задачи на вычисление скоростей распространения и определение характера поляризации плоских электромагнитных волн, распространяющихся в кристалле.

**Метод решения.** Используются уравнения Максвелла и формула Френеля (12) задачи 3.1.2 для нормальной (лучевой) скорости распространения света в кристалле.

**3.2. (2-й тип).** Задачи на расчет поляризационных устройств (призмы Николя, Волластона) и на использование кристалл-рефрактометров для определения оптических характеристик кристаллов (показателей преломления, оптических знаков, ориентаций оптических осей).

**Метод решения.** Используются формулы законов преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей как в обычных условиях, так и в случае полного внутреннего отражения.

**3.3. (3-й тип).** Задачи на расчет интерференции поляризованных лучей.

**Метод решения.** Используются формулы для разности фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, формула (6) задачи 3.1.1 разд. IV для интенсивности результирующего колеба-

ния и закон Малюса для интенсивности света, прошедшего сквозь поляризатор и анализатор.

3.4. (4-й тип). Задачи на анализ эллиптически поляризованного света и на изменение характера поляризации с помощью компенсирующих устройств.

Метод решения. Используются формулы (14) и (16) задачи 3.4.1 и уравнение (4) этой задачи для эллиптически поляризованного света, а также условия вырождения этого уравнения в уравнения для линейно поляризованного света и света, поляризованного по кругу.

3.5. (5-й тип). Задачи на вычисление эффектов, связанных с вращением плоскости поляризации.

Метод решения. Используются формулы (7) и (8) задачи 3.5.1 для угла поворота плоскости поляризации и вращательной способности кристаллической пластинки.

## 6) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Выразить нормальную скорость  $v$  плоской монохроматической волны в однородной кристаллической среде через векторы электрической индукции  $\vec{D}$  и напряженности электрического поля  $\vec{E}$  рассматриваемой волны.

Решение. Исходим из системы уравнений Максвелла, описывающей электромагнитное поле в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (магнитную проницаемость среды  $\mu$  полагаем равной единице). В этом случае уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

где вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  связан с вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1')$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная.

В декартовых координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_3, \quad (2)$$



где  $E_x, E_y, E_z$  — проекции вектора  $\vec{E}$  на оси декартовой системы координат;  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — единичные векторы, направленные по осям этой системы.

В той же системе координат

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Вид, аналогичный (2) и (3), имеют  $\operatorname{rot} \vec{H}$  и  $\operatorname{div} \vec{B}$  соответственно.

Так как по условию задачи в рассматриваемой среде распространяется плоская монохроматическая волна, то это означает, что векторы  $\vec{E}, \vec{D}$  и  $\vec{H}$  изменяются по следующему закону:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \vec{k} \vec{r})}, \\ \vec{D} &= \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\vec{E}_0, \vec{D}_0, \vec{H}_0$  — постоянные векторы (амплитуды соответствующих величин);  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $\vec{k}$  — волновой вектор, направленный по нормали к волновому фронту (поверхности постоянной фазы) и равный

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{N} = \frac{\omega}{v} \vec{N}. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{N}$  — единичный вектор нормали к волновому фронту,  $v$  — нормальная (фазовая) скорость распространения волны в среде.

Для дальнейшего необходимо вычислить, например,  $\operatorname{rot} \vec{E}$ , учитывая, что вектор  $\vec{E}$  определяется соотношением (4). Подставляя выражение для  $\vec{E}$  из (4) в (2) и произведя необходимое дифференцирование, в частности, получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) &= -i (k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \\ \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) &= -i (k_z E_{0x} - k_x E_{0z}) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \\ \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) &= -i (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (2), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -i \{ (k_y E_z - k_z E_y) \vec{e}_1 + (k_z E_x - k_x E_z) \vec{e}_2 + (k_x E_y - k_y E_x) \vec{e}_3 \} = \\ &= -i [\vec{k} \times \vec{E}], \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i [\vec{k} \times \vec{E}]. \quad (6)$$

Аналогичным способом можно убедиться, что

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i [\vec{k} \times \vec{H}], \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = (\vec{k} \cdot \vec{D}), \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = (\vec{k} \cdot \vec{B}). \quad (9)$$

Вычислим, наконец,  $\frac{d\vec{D}}{dt}$ :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} D_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{D}_0 i\omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = i\omega \vec{D},$$

или

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D}. \quad (10)$$

Аналогично:  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}. \quad (11)$

Подставляя (6) — (11) в (1) и учитывая (1'), получим, что система уравнений Максвелла принимает вид

$$\vec{D} = \frac{1}{\omega} [\vec{k} \times \vec{H}], \quad (\vec{k} \cdot \vec{D}) = 0,$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} [\vec{k} \times \vec{E}], \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0.$$

Так как  $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{N}$ , то окончательно запишем

$$\vec{D} = -\frac{1}{v} [\vec{N} \times \vec{H}]; \quad (\vec{N} \cdot \vec{D}) = 0, \quad (12)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 v} [\vec{N} \times \vec{E}]; \quad (\vec{N} \cdot \vec{H}) = 0.$$

Для нахождения искомого выражения для нормальной скорости  $v$  исключим  $\vec{H}$  из первой пары уравнений. В результате

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0 v^2} [\vec{N} \times [\vec{N} \times \vec{E}]].$$

Двойное векторное произведение раскроем по формуле

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

В результате получим

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0 v^2} \{ \vec{N} (\vec{N} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\vec{N} \cdot \vec{N}) \} = -\frac{1}{\mu_0 v^2} \{ \vec{N} (\vec{N} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \}$$

так как  $(\vec{N} \cdot \vec{N}) = N^2 = 1$  ( $\vec{N}$  — единичный вектор нормали). Отсюда

$$\mu_0 v^2 \vec{D} - \vec{E} = -\vec{N} (\vec{N} \cdot \vec{E}). \quad (13)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на  $\vec{D}$ , получим

$$\mu_0 v^2 D^2 - (\vec{E} \cdot \vec{D}) = -(\vec{N} \cdot \vec{D}) (\vec{N} \cdot \vec{E}) = 0 \text{ (см. (12)).}$$

Окончательно для нормальной скорости имеем

$$v^2 = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{\mu_0 D^2}. \quad (14)$$

**3.1.2.** В кристалле задан вектор нормали  $\vec{N}$  к волновому фронту плоской монохроматической волны. Выразить нормальную скорость этой волны через компоненты вектора  $\vec{N}$ .

Решение. Задача будет решаться в так называемой системе диэлектрических осей. Поясним это понятие. Дело в том, что кристаллическая среда является анизотропной средой, т. е. физические свойства этой среды зависят от направления, в котором эти свойства рассматриваются. Факт зависимости физических свойств кристалла от направления находит свое выражение, в частности, в тензорном характере диэлектрической проницаемости кристаллической среды. Это означает, что связь между компонентами вектора электрической индукции  $\vec{D}$  и компонентами вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в кристаллической среде имеет вид

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j, \quad (1)$$

где электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м; а

$$i, j = x, y, z.$$

Развернутая запись (1) имеет вид

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z), \\ D_y &= \epsilon_0 (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z), \\ D_z &= \epsilon_0 (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z). \end{aligned} \quad (1')$$

Таким образом, связь между компонентами векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  определяется девятикомпонентной величиной, называемой тензором диэлектрической проницаемости среды

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из курса тензорного анализа известно, что для тензоров, обладающих определенными свойствами (тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  как раз относится к такому классу тензоров), можно выбрать такую систему координат, в которой рассматриваемый тензор имеет диагональный вид, т. е.

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Система координат, в которой тензор диэлектрической проницаемости принимает диагональный вид (3), называется системой диэлектрических осей. При этом величины  $\epsilon_{xx} = \epsilon_x$ ,  $\epsilon_{yy} = \epsilon_y$ ,  $\epsilon_{zz} = \epsilon_z$  называются главными диэлектрическими проницаемостями. Для изотропной среды  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ .

В системе диэлектрических осей формулы (1) принимают вид

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 \epsilon_x E_x; \\ D_y &= \epsilon_0 \epsilon_y E_y; \\ D_z &= \epsilon_0 \epsilon_z E_z, \end{aligned} \quad (4)$$

или, в более компактной записи,

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i \quad (i = x, y, z). \quad (4')$$

Пусть вектор  $\vec{D}$  направлен по оси  $x$  системы диэлектрических осей. Тогда  $D^2 = \epsilon_0^2 \epsilon_x^2 E_x^2$ ,  $(\vec{E} \cdot \vec{D}) = \epsilon_0 \epsilon_x E_x^2$ . С учетом этого формула (14) задачи 3.1.1 для нормальной скорости плоской монохроматической волны запишется в виде  $a_x^2 = c^2 / \epsilon_x$  или

$$a_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}, \quad (5)$$

где  $a_x$  — нормальная скорость плоской монохроматической волны в том случае, когда вектор  $\vec{D}$  направлен вдоль диэлектрической оси  $x$ . В свою очередь, скорость света в вакууме  $c$  связана с электрической  $\epsilon_0$  и магнитной  $\mu_0$  постоянными соотношениям

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}.$$

Если вектор  $\vec{D}$  направлен вдоль оси  $y$ , то

$$a_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}, \quad (6)$$

если вдоль оси  $z$ , то

$$a_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}. \quad (7)$$

Формулы (5) — (7) можно записать в виде одной формулы

$$a_i = c/\sqrt{\epsilon_i} \quad (i=x, y, z). \quad (8)$$

Скорости  $a_i$  называются главными скоростями света в кристалле. Отметим, что главные скорости  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  не образуют вектора.

Для дальнейшего воспользуемся формулой (13) задачи 3.1.1, которую запишем через проекции векторов на оси диэлектрической системы, т. е.

$$\mu_0 v^2 D_i - E_i = -N_i (\vec{N} \cdot \vec{E}) \quad (i=x, y, z). \quad (9)$$

Учитывая (4') и (8), перепишем (9) в виде

$$D_i = \frac{\epsilon_0 c^2}{(v^2 - a_i^2)} N_i (\vec{N} \cdot \vec{E}). \quad (10)$$

Умножим обе части (10) на  $N_i$  и просуммируем полученные равенства:

$$\sum_i N_i D_i = -\epsilon_0 c^2 (\vec{N} \cdot \vec{E}) \sum_i \frac{N_i^2}{(v^2 - a_i^2)}. \quad (11)$$

Левая часть этого равенства равна нулю, так как  $\sum_i N_i D_i = (\vec{N} \cdot \vec{D}) = 0$  (см. формулы (12) задачи 3.1.1). Следовательно,

$$\sum_i \frac{N_i^2}{(v^2 - a_i^2)} = 0,$$

или, в подробной записи,

$$\frac{N_x^2}{(v^2 - a_x^2)} + \frac{N_y^2}{(v^2 - a_y^2)} + \frac{N_z^2}{(v^2 - a_z^2)} = 0. \quad (12)$$

Формула (12) называется формулой Френеля для нормальной скорости света в кристалле. Она решает сформулированную нами задачу.

**3.1.3.** Показать, что в каждом направлении  $\vec{N}$  в кристалле могут распространяться две волны, вообще говоря, с различными нормальными скоростями. Если эти скорости различны, то каждая из волн поляризована линейно, причем векторы  $\vec{D}$  обеих волн взаимно перпендикулярны.

Решение. Исходим из формулы (12) предыдущей задачи, которую запишем в виде

$$N_x^2 (v^2 - a_y^2)(v^2 - a_z^2) + N_y^2 (v^2 - a_x^2)(v^2 - a_z^2) + N_z^2 (v^2 - a_x^2)(v^2 - a_y^2) = 0. \quad (1)$$

Левую часть этого равенства обозначим через  $f(v^2)$ . Тогда равенство (1) принимает вид

$$f(v^2) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) является квадратным уравнением относительно  $v^2$ . В общем случае это уравнение имеет два корня. Если эти два корня будут вещественны и положительны, то тем самым будет доказано, что в направлении  $\vec{N}$  распространяются две волны с различными нормальными скоростями. Для доказательства предположим, что

$$a_x \geq a_y \geq a_z \quad (3)$$

(рис. 56). Выясним, как качественно ведет себя график функции  $f(v^2)$ . Так как  $N_x, N_y, N_z$  — компоненты единичного вектора в диэлектрических осях, то их квадраты являются положительными числами. Принимая во внимание это обстоятельство, а также условие (3), из (1) получим

$$f(a_x^2) = N_x^2 (a_x^2 - a_y^2) (a_x^2 - a_z^2) \geq 0,$$

$$f(a_y^2) = N_y^2 (a_y^2 - a_x^2) (a_y^2 - a_z^2) \leq 0,$$

$$f(a_z^2) = N_z^2 (a_z^2 - a_x^2) (a_z^2 - a_y^2) \geq 0.$$

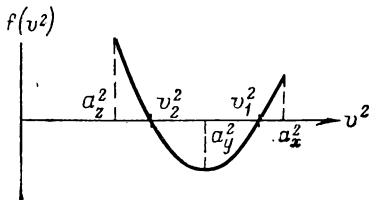


Рис. 56

Сделав естественные предположения о непрерывности и достаточной гладкости функции  $f(v^2)$ , приходим к выводу, что рассматриваемая функция два раза обращается в нуль — в точках  $v_1^2$  и  $v_2^2$ , причем

$$a_y \leq v_1 \leq a_x,$$

$$a_z \leq v_2 \leq a_y.$$

В частном случае, когда  $a_x = a_y = a_z$  (среда изотропная),  $v_1 = v_2 = v$ . Таким образом, корням  $v_1$  и  $v_2$  уравнения (2) соответствуют две световые волны, распространяющиеся с соответствующими нормальными скоростями.

Выясним теперь вопрос о поляризации этих волн. Из формулы (10) предыдущей задачи имеем

$$D_x = - \frac{\epsilon_0 c^2}{v^2 - a_x^2} N_x (\vec{N} \cdot \vec{E}),$$

$$D_y = - \frac{\epsilon_0 c^2}{v^2 - a_y^2} N_y (\vec{N} \cdot \vec{E}),$$

$$D_z = - \frac{\epsilon_0 c^2}{v^2 - a_z^2} N_z (\vec{N} \cdot \vec{E}).$$

Из написанных равенств следует отношение

$$D_x : D_y : D_z = \frac{N_x}{v^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v^2 - a_z^2}. \quad (4)$$

Напишем аналогичные отношения для двух волн, распространяющихся с нормальными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ :

$$D_{1x} : D_{1y} : D_{1z} = \frac{N_x}{v_1^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v_1^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v_1^2 - a_z^2};$$

$$D_{2x} : D_{2y} : D_{2z} = \frac{N_x}{v_2^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v_2^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v_2^2 - a_z^2}.$$

Правые части написанных отношений по смыслу величин, входящих в них, вещественны. Следовательно, вещественны и отношения

$$D_{1x} : D_{1y} : D_{1z},$$

$$D_{2x} : D_{2y} : D_{2z}.$$

Поскольку отношения компонент рассматриваемых волн вещественны, это означает отсутствие сдвига фаз между этими компонентами. А из этого следует, что векторы  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$  колеблются в определенном направлении, т. е. обе волны являются линейно поляризованными.

Наконец, докажем, что плоскости колебаний векторов  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$  взаимно перпендикулярны. Исходим из формулы (13) задачи 3.1.1, записанной для каждой из рассматриваемых волн:

$$\mu_0 v_1^2 \vec{D}_1 - \vec{E}_1 = -\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{E}_1),$$

$$\mu_0 v_2^2 \vec{D}_2 - \vec{E}_2 = -\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{E}_2).$$

Умножая скалярно первое уравнение на  $\vec{D}_2$ , а второе — на  $\vec{D}_1$  и вычитая второе получившееся соотношение из первого, а также учитывая формулы (12) задачи 3.1.1, получим

$$\mu_0 (v_1^2 - v_2^2) (\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2) - [(\vec{D}_2 \cdot \vec{E}_1) - (\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_2)] = 0. \quad (5)$$

Так как в системе диэлектрических осей

$$D_{1i} = \epsilon_0 \epsilon_i E_{1i};$$

$$D_{2i} = \epsilon_0 \epsilon_i E_{2i}; \quad (i = x, y, z),$$

то можно показать, что  $(\vec{D}_2 \cdot \vec{E}_1) = (\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_2)$ . Следовательно,

$$(v_1^2 - v_2^2) (\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2) = 0. \quad (6)$$

Если  $v_1 \neq v_2$ , то  $(\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2) = 0$ , т. е. плоскости поляризации векторов  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$  взаимно перпендикулярны.

**3.1.4.** Прямая, вдоль которой нормальные скорости обеих линейно поляризованных волн, распространяющихся в кристалле, одинаковы, называется оптической осью первого рода. Показать, что в кристалле существуют, вообще говоря, две оптические оси, и, рассмотрев случай вырождения двуосного кристалла в оптиче-

ски одноосный, вычислить в этом случае нормальные скорости распространения волн.

Решение. Из условия  $a_y \leq v_1 \leq a_x$ ,  $a_z \leq v_2 \leq a_y$  (см. задачу 3.1.3) следует, что равенство  $v_1 = v_2$  возможно в том случае, когда  $v_1 = v_2 = a_y$ . В этом случае из формулы (1) предыдущей задачи следует, что

$$f(v) = N_y^2 (a_y^2 - a_x^2) (a_y^2 - a_z^2) = 0. \quad (1)$$

Если все три главные скорости в кристалле различны, то из (1) следует, что  $N_y = 0$ , т. е. оптические оси, если они существуют, лежат в плоскости  $zx$ . Найдем угол между оптической осью и осью  $z$ . Так как для оптической оси  $N_y = 0$  и  $v^2 = a_y^2$ , то формула Френеля (12) задачи 3.1.2 принимает вид

$$\frac{N_x^2}{a_y^2 - a_x^2} + \frac{N_z^2}{a_y^2 - a_z^2} = 0. \quad (2)$$

Если через  $\beta$  обозначить угол между оптической осью и осью  $z$ , то из рис. 57 следует

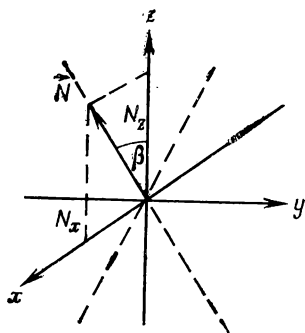


Рис. 57

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_x}{N_z} = \pm \sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}}, \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение главные показатели преломления кристалла соотношением

$$n_i = \frac{c}{a_i} \quad (i = x, y, z), \quad (4)$$

то формулу (3) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_x^2 - n_y^2}{n_y^2 - n_z^2}}. \quad (5)$$

Таким образом, оптические оси первого рода лежат в плоскости  $zx$  и расположены симметрично относительно оси  $z$ . Заметим, что поскольку начало системы диэлектрических осей в кристалле не фиксировано, то везде идет речь не о каких-то фиксированных осях, а только об определенных направлениях в кристалле. Если угол  $\beta$  отсчитывать от оси  $x$ , то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_z}{N_x} = \pm \sqrt{\frac{a_y^2 - a_z^2}{a_x^2 - a_y^2}}. \quad (6)$$

Ясно, что оптически двуосный кристалл вырождается в одноосный, если оптическая ось совпадает либо с осью  $z$ , либо с осью  $x$ .



Пусть оптическая ось совпадает с осью  $z$  (положительный кристалл). В этом случае  $\operatorname{tg} \beta = \frac{N_x}{N_z} = 0$  и из (3) следует, что  $a_x = a_y$ . Формула Френеля в этом случае принимает вид  $N_x^2 (v^2 - a_x^2) (v^2 - a_z^2) + N_y^2 (v^2 - a_x^2) (v^2 - a_z^2) + N_z^2 (v^2 - a_x^2)^2 = 0$ , или

$$(v^2 - a_x^2) [N_x^2 (v^2 - a_z^2) + N_y^2 (v^2 - a_z^2) + N_z^2 (v^2 - a_x^2)] = 0. \quad (7)$$

Первый корень этого уравнения  $v_1 = a_x$ . Этому корню отвечает так называемая обыкновенная волна, распространяющаяся в кристалле. Показатель преломления для этой волны  $n_0 = c/a_x$  не зависит от направления распространения.

Второй корень уравнения (7) получим, приравняв нулю квадратную скобку в левой части (7). Решая получившееся уравнение, запишем

$$v_2 = \cos^2 \alpha \cdot a_x^2 + \sin^2 \alpha \cdot a_z^2, \quad (8)$$

где

$$\cos^2 \alpha = N_z^2, \quad \sin^2 \alpha = N_x^2 + N_y^2,$$

$\alpha$  — угол между осью  $z$  (оптической осью) и вектором нормали  $\vec{N}$  к волновому фронту.

Формуле (8) отвечает так называемая необыкновенная волна. Показатель преломления необыкновенной волны  $n_e = c/v_2$  зависит от направления распространения.

Пусть теперь оптическая ось совпадает с осью  $x$  (отрицательный кристалл). Аналогично тому, как это было сделано для положительного кристалла, можно показать, что в этом случае скорость распространения обыкновенной волны

$$v_2 = a_z, \quad (9)$$

необыкновенной волны —

$$v_1 = \sin^2 \alpha \cdot a_x^2 + \cos^2 \alpha \cdot a_z^2, \quad (10)$$

где  $\alpha$  — угол между осью  $x$  (оптической осью) и вектором нормали.

**3.1.5.** Лучом в кристалле называется линия, направленная вдоль вектора потока энергии (вектора Умова — Пойнтинга). Вдоль лучей распространяется энергия волны. Скорость волнового фронта вдоль направления луча называется лучевой скоростью. Показать, что лучевая скорость  $u$  связана с нормальной скоростью волны  $v$  соотношением  $v = u(\vec{N} \cdot \vec{t})$ , где  $\vec{t}$  — единичный вектор вдоль луча.

Решение. Так как вектор Умова — Пойнтинга является вектором потока электромагнитной энергии, то

$$\vec{S} = w \cdot u \cdot \vec{t}, \quad (1)$$

где  $w$  — плотность электромагнитной энергии, которая складывается из энергий электрического и магнитного полей. Известно, что плотность энергии электрического поля

$$w_э = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{2}. \quad (2)$$

В плоской электромагнитной волне  $w_э = w_m$ , где  $w_m$  — плотность энергии магнитного поля. Следовательно, для плотности энергии электромагнитного поля имеем

$$w = w_э + w_m = (\vec{E} \cdot \vec{D}). \quad (3)$$

С другой стороны, используя формулы (12) задачи 3.1.1, запишем

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{1}{\mu_0 v} [\vec{E} \times [\vec{N} \times \vec{E}]].$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 v} \{ \vec{N} E^2 - \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{N}) \}. \quad (4)$$

Подставим (1) в (4). В результате

$$w u \vec{t} = \frac{1}{\mu_0 v} \{ \vec{N} \cdot E^2 - \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{N}) \}.$$

Умножая обе части этого выражения скалярно на  $\vec{N}$ , получим

$$w u (\vec{N} \cdot \vec{t}) = \frac{1}{\mu_0 v} [E^2 - (\vec{E} \cdot \vec{N})^2]. \quad (5)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой (13) задачи 3.1.1.

$$\mu_0 v^2 \vec{D} - \vec{E} = -\vec{N} (\vec{N} \cdot \vec{E}).$$

Умножая обе части этой формулы скалярно на  $\vec{E}$ , получим

$$\mu_0 v^2 (\vec{E} \cdot \vec{D}) - E^2 = -(\vec{E} \cdot \vec{N})^2. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), имеем

$$w u (\vec{N} \cdot \vec{t}) = v (\vec{E} \cdot \vec{D}). \quad (7)$$

Наконец, подставляя (3) в (7), окончательно получаем

$$v = u (\vec{N} \cdot \vec{t}). \quad (8)$$

Так как  $(\vec{N} \cdot \vec{t}) = \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между единичными векторами  $\vec{N}$  и  $\vec{t}$ , то из (8) следует

$$v = u \cdot \cos \alpha,$$

т. е. нормальная скорость равна проекции лучевой скорости на направление волновой нормали.

## 2-й тип задач (3.2)

3.2.1. Призма Николя состоит из кристалла исландского шпата, разрезанного на две равные части вдоль диагональной плоскости (рис. 58). Эти части склеены канадским бальзамом, показатель преломления которого  $n=1,54$ . Луч света падает на призму

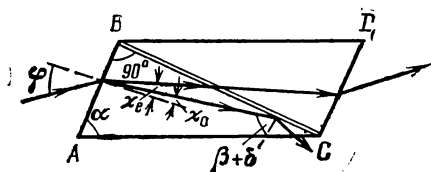


Рис. 58

так, что внутри призмы необыкновенный луч распространяется параллельно длинному ребру призмы, практически не испытывая бокового смещения при переходе через разрез. Для рассматриваемого направления показатель преломления необыкновенного луча  $n_e=1,516$ , а обыкновенного  $n_o=1,658$ . Под каким

углом  $\alpha$  к длинному ребру призмы Николя надо спилить ее основание, чтобы угол падения обыкновенного луча на слой канадского бальзама превышал угол полного внутреннего отражения на  $\delta=1^\circ 45'$ , а необыкновенный луч распространялся так, как описано выше? Вычислить отношение длины призмы  $a$  к ее ширине  $b$  при данных условиях.

Решение. Из закона преломления на границе  $AB$  следует, что

$$\frac{\sin \chi_e}{\sin \chi_o} = \frac{n_e}{n_o}. \quad (1)$$

В призме Николя сечение  $BC$  перпендикулярно ее основаниям  $AB$  и  $CD$ , а по условию задачи необыкновенный луч распространяется параллельно длинному ребру призмы. Поэтому

$$\alpha = 90^\circ - \chi_e. \quad (2)$$

Пусть  $\beta$  — угол полного внутреннего отражения на границе  $BC$  для обыкновенного луча. Он определяется уравнением

$$\sin \beta = \frac{n}{n_o}. \quad (3)$$

По условию задачи

$$\chi_o = \frac{\pi}{2} - (\beta + \delta). \quad (4)$$

Подставляя численные значения  $n$ ,  $n_o$  и  $n_e$  из (1)–(4), находим

$$\beta = 68^\circ 15'; \chi_o = 20^\circ; \chi_e = 22^\circ; \alpha = 68^\circ.$$

Наконец,

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2.88.$$

**3.2.2.** Призма Волластона изготовлена из исландского шпата так, что в левой части призмы оптическая ось параллельна плоскости чертежа, в правой — перпендикулярна (рис. 59). Коэффициент преломления обыкновенного луча  $n_o = 1,658$ , необыкновенного  $n_e = 1,486$ . Угол  $\alpha = 15^\circ$ . Рассчитать, на какой угол будут разведены обыкновенный и необыкновенный лучи.

**Решение.** Луч, распространяющийся в левой части призмы перпендикулярно оптической оси кристалла, состоит из двух волн — обыкновенной и необыкновенной, распространяющихся с разными скоростями. При этом вектор электрического поля обыкновенной волны колеблется в плоскости, перпендикулярной оптической оси, а необыкновенной волны — параллельно этой оси. Ясно, что при переходе

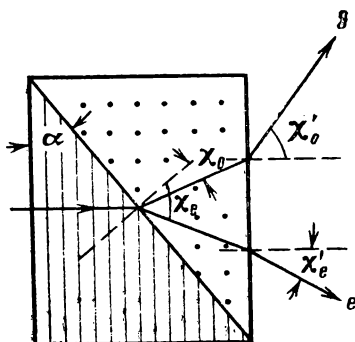


Рис. 59

через границу раздела областей со взаимно перпендикулярной ориентацией оптических осей обыкновенный луч становится необыкновенным, а необыкновенный — обыкновенным. Учитывая это обстоятельство, напомним законы преломления на указанной границе раздела:  $\frac{(\sin \alpha)_o}{\sin \chi_e} = \frac{n_e}{n_o} < 1$ ,  $\frac{(\sin \alpha)_e}{\sin \chi_o} = \frac{n_o}{n_e} > 1$ .

Здесь  $(\sin \alpha)_{o,e}$  означает, что речь идет о синусе угла падения соответственно обыкновенного и необыкновенного лучей в первой половине призмы. Законы преломления на границе кристаллической и воздушной сред:

$$\frac{\sin(\alpha - \chi_e)}{\sin \chi_e'} = \frac{1}{n_e}; \quad \frac{\sin(\alpha - \chi_o)}{\sin \chi_o'} = \frac{1}{n_o},$$

где  $(\alpha - \chi_e)$  — угол падения на границу раздела сред необыкновенного луча,  $\chi_e'$  — угол преломления необыкновенного луча на указанной границе. Такой же смысл имеют аналогичные обозначения для обыкновенного луча.

Подставляя численные значения  $n_o$ ,  $n_e$  и  $\alpha$ , из написанных формул получим  $\chi_e' = 2^\circ 14'$ ,  $\chi_o' = 3^\circ 2'$ . Угол развода лучей

$$\psi = \chi_e' + \chi_o' = 5^\circ 16'.$$

**3.2.3.** Как надо на кристалл-рефрактометре ориентировать пластинку, вырезанную произвольным образом из одноосного кристалла, чтобы получить оба главных показателя преломления?

**Решение.** Принцип действия кристалл-рефрактометра основан на использовании явления полного внутреннего отражения. Пластинка исследуемого кристалла кладется на поверхность стекла с высоким (до двух) показателем преломления  $n_c$ . Свет падает

со стороны стекла и отражается от пластинки. Показатель преломления исследуемого вещества  $n$  определяется по предельному углу полного внутреннего отражения  $\beta$  с помощью формулы  $n = n_c \sin \beta$ . В случае отражения от кристалла существуют два предельных угла, соответствующих обыкновенному и необыкновенному лучам. Предельный угол для обыкновенного луча  $\beta_0$  не зависит от ориентации пластинки и может быть измерен при любой ориентации. Предельный угол для необыкновенного луча  $\beta_e$  изменяется при изменении ориентации пластинки.

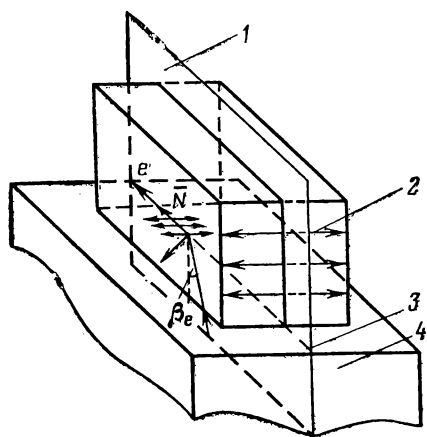


Рис. 60

Пусть для какой-то произвольной, но фиксированной ориентации пластинки удалось зафиксировать предельный угол полного внутреннего отражения для необыкновенного луча. В этом случае свет проникает во «вторую» среду в виде поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы раздела сред (см., например, задачу 3.3.1 разд. III). Точнее, волновая нормаль  $\vec{N}$  в кристаллической среде в этом случае параллельна линии пересечения плоскости падения с плоскостью раздела сред.

Теперь повернем кристалл так, чтобы его оптическая ось была перпендикулярна этой линии пересечения (рис. 60), и снова зафиксируем предельный угол полного внутреннего отражения для необыкновенного луча. В этом случае поверхностная волна в кристалле распространяется перпендикулярно оптической оси и распадается на обыкновенную волну с электрическим вектором, перпендикулярным оптической оси, и на необыкновенную, электрический вектор которой параллелен оптической оси. Поскольку главный показатель преломления определяется по отношению к тому случаю, когда вектор электрического поля в волне направлен вдоль диэлектрической оси (в одноосном кристалле — вдоль оптической оси), то при указанной ориентации пластинки будет измерен главный показатель преломления необыкновенной волны.

Итак, для измерения главного показателя преломления необыкновенного луча кристаллическая пластинка должна быть ориентирована так, чтобы плоскость, содержащая оптическую ось и нормаль к границе раздела сред, была перпендикулярна плоскости падения луча. Главный показатель преломления обыкновенного луча может быть измерен при любой ориентации пластинки.

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Найти интенсивность света, прошедшего через кристаллическую пластинку, помещенную между двумя николями, главные плоскости которых образуют с одним из главных направлений пластинки углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Исследовать случаи скрещенных и параллельных николей.

**Решение.** Под главной плоскостью николя понимают плоскость, содержащую оптическую ось и вектор нормали к волновому фронту, т. е. плоскость, в которой происходят колебания электрического вектора необыкновенной волны. Один из николей, фигурирующих в условии задачи, является поляризатором, второй — анализатором.

Свет, вышедший из поляризатора, попадает в кристаллическую пластинку, где расщепляется на обыкновенную и необыкновенную волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Взаимное расположение плоскостей поляризации обыкновенной и необыкновенной волн в кристалле, а также главных плоскостей поляризатора и анализатора изображено на рис. 61. Здесь  $OP$ ,  $OA$  — главные плоскости поляризатора и анализатора соответственно;  $OD_1$ ,  $OD_2$  — главные направления кристаллической пластинки;  $OE$  — амплитуда света, падающего на пластинку.

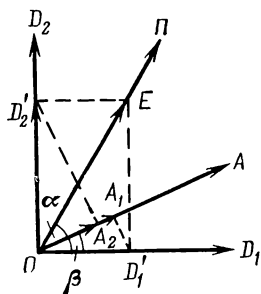


Рис. 61

Так как скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в пластинке различны, то пройдя сквозь пластинку, указанные лучи приобретают разность фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)h, \quad (1)$$

где  $h$  — толщина пластинки,  $\lambda$  — длина волны используемого света.

Амплитуда света, вышедшего из пластинки с плоскостью поляризации, параллельной главному направлению,  $OD_1$ ,  $OD_1' = OE \cos \alpha$ . Для света, плоскость поляризации которого параллельна главному направлению  $OD_2$ ,  $OD_2' = OE \sin \alpha$ . Амплитуды лучей, пропущенных анализатором:

$$OA_1 = OD_1' \cdot \cos \beta = OE \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad (2)$$

$$OA_2 = OD_2' \cdot \sin \beta = OE \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (3)$$

Лучи, пропущенные анализатором, являются когерентными лучами, и так как их плоскости поляризации параллельны, они интерферируют друг с другом. Поскольку, к тому же, направления распространения этих лучей совпадают, то для нахождения

интенсивности суммарного излучения можно воспользоваться формулой (6) задачи 3.1.1 разд. IV:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (4)$$

$$\text{где } I_1 = \frac{OA_1^2}{2}; \quad I_2 = \frac{OA_2^2}{2}; \quad (5)$$

$\delta$  — разность фаз между интерферирующими лучами, определяемая формулой (1).

С учетом (2), (3) и (5) формула (4) принимает вид

$$I = I_0 \{ \cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \delta/2 \}, \quad (6)$$

где  $I_0 = \frac{OE^2}{2}$  — интенсивность света, падающего на кристаллическую пластинку.

Пусть поляризатор и анализатор «скрещены». Это означает, что угол  $(\alpha - \beta)$  между главными плоскостями поляризатора и анализатора равен  $90^\circ$ . В этом случае формула (6) принимает вид

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \delta/2. \quad (7)$$

Если  $(\alpha - \beta) = 0$  (поляризатор и анализатор «параллельны»), то

$$I_{\parallel} = I_0 (1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \delta/2). \quad (8)$$

Интенсивности (7) и (8) дополняют друг друга в том смысле, что

$$I_{\perp} + I_{\parallel} = I_0.$$

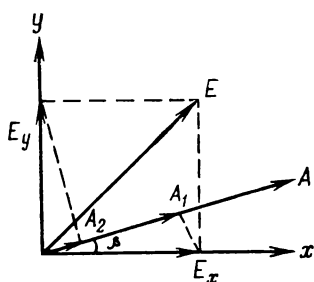


Рис. 62

3.3.2. На кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, падает нормально свет, поляризованный по кругу. Прошедший свет просматривается через анализатор. Определить интенсивность прошедшего света, если главная плоскость анализатора составляет угол  $\beta$  с одним из главных направлений пластинки.

Решение. Направим оси системы координат по главным направлениям кристаллической пластинки (рис. 62). Для света, поляризованного по кругу

$$E_x = a \cdot \cos \tau, \quad (1)$$

$$E_y = a \cdot \sin \tau,$$

где  $\tau = \omega t - (\vec{k} \vec{r})$ .

На выходе из пластинки

$$E_x = a \cos \tau; \quad E_y = a \sin(\tau + \delta), \quad (2)$$

где  $\delta$  — разность фаз, приобретаемая лучами при прохождении сквозь пластинку.

После прохождения анализатора световые лучи изменяются по закону

$$E_{OA_1} = E_x \cdot \cos \beta = a \cdot \cos \beta \cdot \cos \tau,$$

$$E_{OA_2} = E_y \cdot \sin \beta = a \sin \beta \cdot \sin (\tau + \delta) = a \cdot \sin \beta \cdot \cos \left[ \tau + \left( \delta + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (3)$$

Применяя к этим пучкам формулу (6) задачи 3.1.1 разд. IV, получим

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \left( \delta + \frac{\pi}{2} \right)$$

или

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \sin \delta, \quad (4)$$

где

$$I_1 = \frac{a^2 \cos^2 \beta}{2}; \quad I_2 = \frac{a^2 \sin^2 \beta}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (4), окончательно находим

$$I = \frac{a^2}{2} (1 + \sin 2\beta \cdot \sin \delta). \quad (5)$$

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Линейно поляризованный луч проходит через кристаллическую пластинку, одно из главных направлений которой составляет с главной плоскостью поляризатора угол  $i$ . Разность фаз, сообщаемая пластинкой, равна  $\delta$ . Найти: 1) отношение полуосей эллипса колебаний полученного эллиптически поляризованного света; 2) угол между главными направлениями пластинки и полуосями эллипса.

**Решение.** Луч, проходящий через кристаллическую пластинку, расщепляется на обыкновенную и необыкновенную волны, колебания которых поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. В силу различия в скоростях распространения эти волны, пройдя сквозь пластинку, приобретают фазовый сдвиг  $\delta$ , определяемый формулой (1) задачи 3.3.1. В результате свет, вышедший из пластинки, оказывается эллиптически поляризованным. Покажем это. Направим оси системы координат  $Ox$  и  $Oy$  по главным направлениям кристаллической пластинки (рис. 63). Тогда вектор напряженности электрического поля в

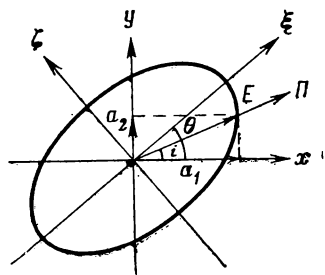


Рис. 63



обыкновенной и необыкновенной волнах меняется по закону

$$E_x = a_1 \cos \tau; E_y = a_2 \cos (\tau + \delta), \quad (1)$$

где  $\tau = \omega t - (\vec{k} \vec{r})$ ;  $a_1, a_2$  — амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн соответственно;  $\delta$  — фазовый сдвиг. По условию задачи

$$\frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg} i, \quad (2)$$

где  $i$  — угол между главной плоскостью поляризатора и главным направлением  $OX$  кристаллической пластинки.

Формулы (1) описывают эллиптически поляризованную волну. В самом деле, перепишем (1) в виде

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos \tau, \quad \frac{E_y}{a_2} = \cos (\tau + \delta).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{a_1} \sin (\tau + \delta) - \frac{E_y}{a_2} \sin \tau &= \sin \delta, \\ \frac{E_x}{a_1} \cos (\tau + \delta) - \frac{E_y}{a_2} \cos \tau &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Возводя в квадрат эти выражения и складывая, получим

$$\left( \frac{E_x}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{a_2} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (4)$$

Уравнение (4) описывает эллипс, оси которого в общем случае не параллельны осям  $OX$  и  $OY$ . Для решения задачи необходимо перейти в систему координат, оси которой  $O\xi$  и  $O\zeta$  направлены по осям эллипса. В новых координатах уравнение эллипса должно иметь каноническую форму

$$\left( \frac{E_\xi}{A_1} \right)^2 + \left( \frac{E_\zeta}{A_2} \right)^2 = 1, \quad (5)$$

а это возможно в том случае, если проекции вектора напряженности электрического поля на оси новой системы координат изменяются по закону

$$\begin{aligned} E_\xi &= A_1 \cos (\tau + \delta_0), \\ E_\zeta &= \pm A_2 \sin (\tau + \delta_0), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\delta_0$  — некая начальная фаза. Наличие двух знаков в (6) указывает на возможность двух направлений движения конца электрического вектора, описывающего эллипс. Новые компоненты  $E_\xi, E_\zeta$  связаны с прежними  $E_x, E_y$  с помощью формул преобразования

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \\ E_\zeta &= -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\theta$  — угол поворота старой системы координат при переходе к новой.

Для определения длин полуосей эллипса  $A_1$  и  $A_2$  сравниваем (6) и (7) и, используя (1), получим

$$\begin{aligned} A_1 (\cos \tau \cdot \cos \delta_0 - \sin \tau \sin \delta_0) &= a_1 \cos \tau \cdot \cos \theta + a_2 (\cos \tau \cdot \cos \delta - \\ &\quad - \sin \tau \cdot \sin \delta) \cdot \sin \theta, \\ \pm A_2 (\sin \tau \cos \delta_0 + \cos \tau \sin \delta_0) &= -a_1 \cos \tau \sin \theta + \\ &\quad + a_2 (\cos \tau \cos \delta - \sin \tau \cdot \sin \delta) \cos \theta. \end{aligned}$$

Приравнявая в этих выражениях коэффициенты при  $\cos \tau$  и  $\sin \tau$ , получим

$$A_1 \cos \delta_0 = a_1 \cos \theta + a_2 \cos \delta \cdot \sin \theta, \quad (8a)$$

$$A_1 \sin \delta_0 = a_2 \sin \delta \cdot \sin \theta, \quad (8б)$$

$$\pm A_2 \cos \delta_0 = -a_2 \sin \delta \cos \theta, \quad (8в)$$

$$\pm A_2 \sin \delta_0 = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \delta \cdot \cos \theta. \quad (8г)$$

Возводя в квадрат и складывая (8a) и (8б), находим

$$A_1^2 = a_1^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta + 2a_1 a_2 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \delta. \quad (9)$$

Аналогично из (8в) и (8г) имеем

$$A_2^2 = a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta - 2a_1 a_2 \cos \theta \sin \theta \cos \delta. \quad (9')$$

Из (9) и (9') находим

$$A_1^2 + A_2^2 = a_1^2 + a_2^2. \quad (10)$$

Умножим теперь (8a) на (8в), (8б) на (8г) и сложим. Это даст

$$\pm A_1 A_2 = a_1 a_2 \sin \delta. \quad (11)$$

Из (10) и (11) найдем

$$\pm \frac{2A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin \delta. \quad (12)$$

Введем теперь вспомогательный угол  $i'$ , такой, что

$$\pm \frac{A_2}{A_1} = \operatorname{tg} i'. \quad (13)$$

Численное значение  $\operatorname{tg} i'$  определяет отношение осей эллипса, а знак при  $\operatorname{tg} i'$  характеризует два варианта, которые можно использовать при описании эллипса. С учетом (2) и (13) формула (12) принимает вид

$$\sin 2i' = (\sin 2i) \cdot \sin \delta. \quad (14)$$

Формула (14) решает первую часть нашей задачи.

Деля (8в) на (8a) и (8г) на (8б), получим

$$\pm \frac{A_2}{A_1} = \frac{-a_2 \sin \delta \cdot \cos \theta}{a_1 \cos \theta + a_2 \cos \delta \cdot \sin \theta} = \frac{-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \delta \cdot \cos \theta}{a_2 \sin \delta \cdot \sin \theta}. \quad (15)$$

Из (15) находим следующее уравнение для  $\theta$ :

$$(a_1^2 - a_2^2) \sin 2\theta = 2a_1 a_2 \cos \delta \cdot \cos 2\theta,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \cos \delta.$$

Наконец, учитывая (2), получим

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} i}{1 - \operatorname{tg}^2 i} \cos \delta,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\theta = (\operatorname{tg} 2i) \cos \delta. \quad (16)$$

Формула (16) определяет ориентацию эллипса относительно главных направлений кристаллической пластинки, т. е. решает вторую часть нашей задачи.

**3.4.2.** Найти наименьшую толщину  $h_{\min}$  пластинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий плоскополяризованный свет выходил поляризованным по кругу ( $n_e = 1,5533$ ;  $n_o = 1,5442$ ;  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ).

Решение. Уравнение (4) предыдущей задачи превращается в уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2 \quad (1)$$

в том случае, если  $a_1 = a_2 = a$  и

$$\sin \delta = \pm 1 \quad (2)$$

(знак «плюс» в (2) соответствует левой круговой поляризации, знак «минус» — правой).

Из (2) следует, что  $\delta = (2m+1)\pi/2$ , ( $m=0, 1, 2, \dots$ ). Подставляя в это условие выражение (1) задачи 3.3.1 для фазового сдвига между обыкновенной и необыкновенной волнами, получим

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) h = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

$$\text{т. е. } h = \frac{(2m+1) \lambda}{4(n_e - n_o)}.$$

Отсюда

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,014 \text{ мм.}$$

**3.4.3.** Компенсатор Бабине помещен между двумя «скрещенными» призмами Николя. В каких местах компенсатора наблю-

даются темные полосы, если показатели преломления  $n_o$  и  $n_e$  для обыкновенной и необыкновенной волн считаются известными?

Решение. Компенсатор Бабинэ позволяет получать любые разности фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, в том числе и нулевые. Компенсатор состоит из двух кварцевых клиньев (положительный одноосный кристалл) с одинаковыми острыми углами (рис. 64). В одном из клиньев оптическая ось параллельна, а в другом перпендикулярна ребру. Пусть  $h_1$  и  $h_2$  — толщины клиньев в некотором определенном месте. Пусть луч света падает на компенсатор снизу, нормально к его грани. Так как оптическая ось перпендикулярна направлению распространения, то падающий луч расщепляется на обыкновенный и необыкновенный лучи, распространяющиеся с разными скоростями. Так как кристалл положителен, то  $v_o > v_e$  ( $n_o < n_e$ ) и обыкновенный луч после прохождения первого клина будет опережать по фазе необыкновенный луч на величину

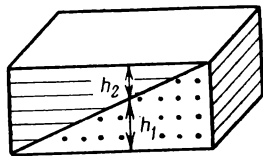


Рис. 64

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) h_1. \quad (1)$$

Однако после прохождения границы раздела между клиньями обыкновенный луч становится необыкновенным (см. в связи с этим задачу 3.2.2) и будет отставать по фазе от второго луча на величину

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) h_2. \quad (2)$$

Фазовый сдвиг между рассматриваемыми лучами после прохождения через компенсатор будет равен

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) (h_1 - h_2). \quad (3)$$

Если за компенсатором поставить анализатор, то в компенсаторе будет наблюдаться система темных полос, расположенных в тех местах, которые соответствуют линейной поляризации света, прошедшего сквозь компенсатор.

Для нахождения условия линейной поляризации света, прошедшего сквозь кристаллическую пластинку, рассмотрим случай вырождения уравнения (4) задачи 3.3.2 в уравнение прямой линии

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{a_2}{a_1}. \quad (4)$$

Такое вырождение возможно при

$$\delta = m\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получим, что темные полосы будут наблюдаться в таких местах компенсатора, для которых

$$h_1 - h_2 = \frac{m\lambda}{2(n_e - n_o)}. \quad (6)$$

### 5-й тип задач (3.5)

**3.5.1.** Чему равна разность показателей преломления  $\Delta n$  для право- и левокругополяризованного света длины волны  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$  в кварце, если известно, что вращение плоскости поляризации в кварце для этой волны равно  $21,7^\circ$  на 1 мм?

Решение. Согласно теории Френеля вращение плоскости поляризации в кристаллической среде объясняется различием в скоростях распространения лево- и правокругополяризованных лучей, на которые в каждый данный момент можно разложить линейно-поляризованный свет. Если через  $E_x$  и  $E_y$  обозначить проекции линейно поляризованного света на оси координат, то согласно сказанному выше эти проекции можно представить в виде суммы проекций кругополяризованных лучей, т. е.

$$E_x = E_{x1} + E_{x2}, \quad E_y = E_{y1} + E_{y2}, \quad (1)$$

где для компонент света, поляризованного по левому кругу, имеем

$$E_{x1} = \frac{a}{2} \cos \tau_1, \quad E_{y1} = \frac{a}{2} \sin \tau_1, \quad (2)$$

а для компонент света, поляризованного по правому кругу,

$$E_{x2} = \frac{a}{2} \cos \tau_2, \quad E_{y2} = -\frac{a}{2} \sin \tau_2. \quad (3)$$

В свою очередь,

$$\tau_1 = \omega t + \frac{\omega}{v_1} h; \quad \tau_2 = \omega t + \frac{\omega}{v_2} h; \quad (4)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости распространения лево- и правокругополяризованных лучей соответственно,  $h$  — толщина пластинки. Подставляя (2) и (3) в (1) и учитывая (4), получим

$$E_x = a \cdot \cos \frac{\omega h}{2c} \Delta n \cdot \cos \tau, \quad E_y = a \cdot \sin \frac{\omega h}{2c} \Delta n \cdot \cos \tau, \quad (5)$$

где

$$\Delta n = \left( \frac{c}{v_1} - \frac{c}{v_2} \right) = n_1 - n_2, \quad \tau = \omega t + \frac{\omega h}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right).$$

Отношение  $E_x/E_y$  дает значение тангенса угла поворота плоскости поляризации, т. е.

$$\frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\omega h}{2c} \Delta n. \quad (6)$$

Из (6) получаем

$$\varphi = \alpha \cdot h, \quad (7)$$

где  $\alpha = \frac{\omega}{2c} \frac{\Delta n}{\lambda_0} = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\Delta n}{\lambda_0}$  — вращательная способность кристаллической пластинки,  $\lambda_0$  — длина используемого света в пустоте. Отсюда

$$\Delta n = \frac{\varphi \lambda_0}{\pi h} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}.$$

**3.5.2.** Дисперсия вращения кварца, вырезанного перпендикулярно к оптической оси, для желтой области спектра характеризуется следующими значениями вращательной способности  $\alpha$ :

$\lambda, \text{Å}$	$\alpha, \text{град/мм}$
5269	27,543
5895	21,684

Зависимость вращательной способности от длины волны в узкой спектральной области может быть выражена формулой

$$\alpha = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные.

Определить наименьшую толщину кварцевой пластинки  $h$ , помещенной между двумя скрещенными николями, чтобы из двух линий натрия  $\lambda_1 = 5889,953 \text{ Å}$  и  $\lambda_2 = 5895,923 \text{ Å}$  одна полностью гасилась, а другая пропусклась наполовину.

Решение. Предположим, что системой, описанной в задаче, не пропускается свет длиной волны  $\lambda_1$ . Это означает, что угол поворота плоскости поляризации  $\varphi$  для света этой длины волны должен быть равен  $\pi$ , т. е.

$$\pi = \alpha_1 h. \quad (1)$$

Потребуем, чтобы кристаллическая пластинка при той же толщине поворачивала плоскость поляризации света с длиной волны  $\lambda_2$  на угол  $\pi/4$ , т. е.

$$\pi/4 = \alpha_2 h. \quad (2)$$

При этом (в соответствии с законом Малюса) через анализатор будет пропускаться половинная интенсивность, как это требуется по условию задачи.

Согласно условию задачи

$$\alpha_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2}, \quad \alpha_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}. \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), получим

$$\pi = \left( A + \frac{B}{\lambda_1^2} \right) h, \quad \pi/4 = \left( A + \frac{B}{\lambda_2^2} \right) h. \quad (4)$$

Исключая постоянную  $A$ , запишем

$$\left(\frac{\pi}{h} - \frac{B}{\lambda_1^2}\right) = \left(\frac{\pi}{4h} - \frac{B}{\lambda_2^2}\right).$$

Решая это уравнение относительно  $h$ , находим

$$h = \frac{3\pi\lambda_1^2\lambda_2^2}{4B(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \cong \frac{3\pi\lambda^3}{8B\delta\lambda}, \quad (5)$$

где  $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ;  $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ ;  $\lambda_1^2\lambda_2^2 = \lambda^4$ . Подставляя в (3) численные значения из таблицы в условии задачи, для  $B$  получим  $B \cong \cong 10^{-6}$  град·мм. Подставляя в (5) необходимые численные данные, находим  $h \cong 2500$  мм.

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Пользуясь теоремой взаимности (см. задачу 5.1), написать формулу Френеля для лучевой скорости света в кристалле.

4.2. Используя принцип Гюйгенса, построить направления преломленных волн в одноосном кристалле (положительном и отрицательном) для следующих случаев: 1) оптическая ось перпендикулярна к плоскости падения и параллельна поверхности кристалла; 2) оптическая ось лежит в плоскости падения параллельно поверхности кристалла; 3) оптическая ось лежит в плоскости падения под углом  $45^\circ$  к поверхности кристалла.

4.3. Волновая или лучевая поверхность строится следующим образом: из какой-либо точки проводятся прямые во всевозможных направлениях и на них откладываются отрезки, длины которых пропорциональны лучевым скоростям в этих направлениях. Показать, что лучевая поверхность одноосного кристалла распадается на совокупность двух поверхностей: сферу (обыкновенная волна) и эллипсоид вращения (необыкновенная волна).

4.4. Почему если смотреть через плоскопараллельную двупреломляющую кристаллическую пластинку на удаленный предмет, то видно одно изображение, а не два, как в случае близко расположенных предметов?

4.5. Ветровое стекло и фары автомашины иногда снабжаются пластинами из поляроида. Как должны быть расположены эти пластины, чтобы шофер мог видеть дорогу, освещенную светом его фар, и не страдал бы от света фар встречных машин?

4.6. Почему тонкая двоякопреломляющая пластинка, помещенная между двумя николями, имеет цветную окраску?

4.7. В каких случаях тонкая кристаллическая пластинка, помещенная между скрещенными николями, кажется темной в монохроматическом свете?

4.8. В некоторых установках, предназначенных для анализа поляризованного света, пучок света пропускается через равномерно вращающийся николь, а затем попадает на фотоэлемент. На

какую частоту должен быть рассчитан усилитель фототока, если николь вращается с угловой скоростью  $\omega$ ?

4.9. Используя формулу (6) задачи 3.3.1, получите закон Малюса для интенсивности света, прошедшего сквозь поляризатор и анализатор.

4.10. Как отличить свет левополяризованный по кругу от правополяризованного?

4.11. Как отличить естественный свет от света кругополяризованного и от смеси естественного света с кругополяризованным?

4.12. Как отличить эллиптически поляризованный свет от смеси естественного света с линейно-поляризованным?

4.13. Как отличить эллиптически поляризованный свет от смеси естественного света с эллиптически-поляризованным?

4.14. Пластинка кварца толщиной в 1 мм вырезана перпендикулярно к оптической оси и помещена между скрещенными николями. Почему при любой длине волны падающего света она будет оставаться освещенной?

4.15. Как отличить пластинку кварца, вырезанную перпендикулярно к оси, от пластинки, вырезанной параллельно оси, имея в своем распоряжении два николя и источник белого света?

4.16. Почему при вращении анализатора пластинка кварца, вырезанная перпендикулярно к оптической оси и помещенная между николями, меняет свою окраску?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Показать, что любая формула, связывающая величины  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{N}$ ,  $v$  в плоской волне, распространяющейся в кристалле, остается справедливой, если величины, стоящие в верхней строке ряда

$$\vec{D}, \vec{E}, \vec{H}, \vec{N}, v, \quad \vec{t}, c, \mu_0 \mu, \epsilon_0 \epsilon_i, \alpha_i, \\ \vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{t}, 1/\mu, \vec{N}, 1/c, 1/\mu_0 \mu, 1/\epsilon_0 \epsilon_i, 1/\alpha_i,$$

заменить стоящими под ними величинами в нижней строке. То же самое относится к формулам, связывающим  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{t}$ ,  $u$  (теорема взаимности).

Указание. Для доказательства воспользоваться уравнениями Максвелла (12) задачи 3.1.1 для плоской монохроматической волны в кристалле и связью (4) между компонентами векторов электрической индукции и напряженности электрического поля в системе диэлектрических осей.

5.2. Показать, что в каждом направлении кристалла могут распространяться два луча. Если лучевые скорости этих лучей различны, то оба луча линейно поляризованы, причем векторы  $\vec{E}$  в них взаимно перпендикулярны.



5.3. Прямая, в направлении которой лучевые скорости обоих линейно-поляризованных лучей, могущих распространяться в кристалле, одинаковы, называется оптической осью второго рода. Показать, что в кристалле существуют, вообще говоря, две оптические оси второго рода и найти их направления.

Ответ. Оптические оси второго рода лежат в плоскости  $zx$  симметрично относительно оси  $z$ , образуя с ней угол  $\gamma$ , определяемый формулой

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{a_z}{a_x} \sqrt{\frac{a^2_x - a^2_y}{a^2_y - a^2_z}} = \pm \sqrt{\frac{n^2_x - n^2_y}{n^2_y - n^2_z}} = \frac{a_z}{a_x} \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\beta$  — угол между осью  $z$  и оптической осью первого рода.

5.4. Определить оптический знак двусосного кристалла по трем главным показателям преломления.

*Примечание.* Двусосный кристалл считается положительным, если угол между оптической осью второго рода и диэлектрической осью наибольшей диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_z$  меньше  $45^\circ$ ; если этот угол больше  $45^\circ$ , то кристалл называется отрицательным.

Ответ. Кристалл положителен, если  $n_z - n_y > n_y - n_x$ , и отрицателен, если  $n_z - n_y < n_y - n_x$ .

5.5. Определить оптический знак двусосного кристалла, если  $n_z - n_x = 0,036$  и  $n_z - n_y = 0,019$ .

Ответ. Кристалл отрицателен.

5.6. Найти выражение для лучевой скорости в зависимости от направления луча в оптически одноосном кристалле.

Ответ. Если оптическая ось направлена вдоль оси  $z$  (положительный кристалл), то

$$u_1 = a_x; \frac{1}{u^2_2} = \frac{1}{a^2_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{a^2_z} \sin^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между оптической осью (осью  $z$  и направлением луча). Если оптическая ось направлена вдоль оси  $x$  (отрицательный кристалл), то

$$u_2 = a_z; \frac{1}{u^2_1} = \frac{1}{a^2_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{a^2_z} \cos^2 \alpha.$$

5.7. Определить максимальный угол  $\delta$  между направлением луча и направлением волновой нормали в исландском шпате, для которого  $n_o = 1,658$  и  $n_e = 1,486$ .

Ответ.

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{n^2_o - n^2_e}{2n_o n_e} = 6^\circ 15'.$$

5.8. Поляризационная призма представляет собой прямоугольную призму, выполненную из исландского шпата ( $n_o = 1,658$ ,  $n_e = 1,516$ ) так, что его оптическая ось параллельна плоскости распила (рис. 65,  $a$ ; оптическая ось перпендикулярна плоскости чер-

тежа). Склеивающим веществом является канадский бальзам ( $n=1,54$ ). Найти наивыгоднейшую апертуру призмы и соответствующее ей отношение длины  $a$  к ширине  $b$ .

*Примечание.* Апертурой поляризационной призмы называется удвоенное значение максимально возможного угла падения  $\varphi$ , при котором имеется необыкновенный луч, проходящий через призму.

Ответ. Искомые величины находятся из следующих формул:

$$(n^2_o - n^2_e) \left( \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + [n^2_o - n^2_e - 2n(n + n_e)] \frac{a^2}{b^2} - (n + n_e)^2 = 0,$$

$$\sin \varphi = \frac{n_e}{\sqrt{1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2}}.$$

Подставив сюда численные значения  $n_o$ ,  $n_e$  и  $n$ , получим

$$2\varphi = 34^\circ 20'; \quad \frac{a}{b} = 4,93.$$

5.9. Решить предыдущую задачу в предположении, что слой склеивающего вещества заменен воздухом.

Ответ.

$$2\varphi = 8^\circ 10'; \quad \frac{a}{b} = 0,826.$$

5.10. Двоякопреломляющая призма изготовлена из стекла с показателем преломления  $n=1,66$  и исландского шпата, имеющего показатель преломления для обыкновенного луча  $n_o=1,66$  и для необыкновенного —  $n_e=1,49$ . Оптическая ось перпендикулярна плоскости чертежа (рис. 65, б). Угол  $\alpha=30^\circ$ . На стеклянную грань призмы падает нормально к ней пучок света. Рассчитать величину угла расхождения  $\psi$  поляризованных лучей на выходе их из призмы.

Ответ.  $\psi=5^\circ 45'$ .

5.11. Плоская пластинка толщиной 1 мм выпиlena из исландского шпата. Ее толщина измеряется с помощью поляризационного микроскопа (т. е. микроскопа, перед объективом которого установлен поляризатор) по смещению тубуса при фокусировке на нижнюю и верхнюю поверхности пластинки. Поляризатор устанавливается так, что сквозь него проходит либо обыкновенный луч, либо необыкновенный. Измеренная таким образом толщина пластинки имеет два разных значения  $h_1$  и  $h_2$ . Каким образом надо вырезать пластинку, чтобы значения  $h_1$  и  $h_2$  были экстре-

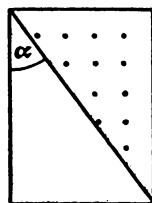
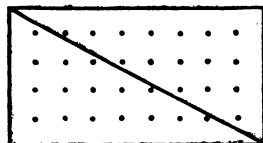


Рис. 65, а, б

мальными? Чему равны эти экстремальные значения, если для исландского шпата  $n_o=1,658$ ,  $n_e=1,486$ ?

Ответ. Пластика должна быть вырезана параллельно оптической оси;

$$h_1 = \frac{1}{n_o} \text{ мм} = 0,603 \text{ мм}, h_2 = \frac{1}{n_e} \text{ мм} = 0,673 \text{ мм}.$$

5.12. При измерении показателей преломления кристаллической пластинки на кристалл-рефрактометре оказалось, что один показатель преломления постоянен при всех поворотах пластинки и равен 1,646, а другой меняется от 1,642 до 1,646. Определить оптический знак кристалла и ориентировку пластинки относительно оптической оси.

Ответ. Кристалл отрицателен, пластинка вырезана параллельно оптической оси.

5.13. Как будут изменяться величины показателей преломления пластинки из того же вещества, что и в предыдущей задаче, если пластинка вырезана перпендикулярно оптической оси?

Ответ. Оба показателя имеют постоянные значения, соответствующие минимальному и максимальному значениям, приведенным в предыдущей задаче.

5.14. Для пластинки топаза графическое изображение изменений показателей преломления, полученных на кристалл-рефрактометре, имеет вид окружности радиуса  $n_z=1,6193$  и находящегося внутри нее эллипса с полуосями  $n_x=1,6100$  и  $n_y=1,6127$ . Определить оптический знак топаза и ориентировку пластинки относительно диэлектрических осей.

Ответ. Кристалл положителен, ось наибольшей диэлектрической проницаемости перпендикулярна к пластинке.

5.15. Как надо ориентировать пластинку из двусосного кристалла, чтобы получить на кристалл-рефрактометре три главных показателя преломления?

Ответ. Перпендикулярно к любой из диэлектрических осей кристалла.

5.16. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси. Определить разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших через пластинку. Толщина пластинки 0,03 мм,  $n_o=1,658$ ,  $n_e=1,486$ .

Ответ.  $d = h(n_o - n_e) = 0,00516 \text{ мм}$ .

5.17. Узкий пучок неполяризованного света падает нормально на пластинку исландского шпата и затем нормально на вторую такую же пластинку, главная плоскость которой образует с главной плоскостью первой пластинки угол в  $30^\circ$ . Свет попадает на экран. Описать полученную картину и найти относительную интенсивность наблюдаемых на экране пятен.

*Примечание.* Пластика вырезана так, что оптическая ось составляет угол  $\gamma$  с плоскостью пластинки. При этом  $0 \leq \gamma < 90^\circ$ .

Ответ. На экране образуются четыре пятна. Интенсивности относятся как 1:3:1:3.

5.18. Главные плоскости двух призм Николя образуют между собой угол в  $30^\circ$ . Как изменится интенсивность прошедшего света, если главные плоскости поставить под углом в  $45^\circ$ ?

Ответ: Интенсивность изменится в отношении 3:2.

5.19. Линейно поляризованный свет падает на поляризатор, главная плоскость которого составляет угол  $\theta$  с направлением поляризации света. За первым поляризатором стоит второй, главная плоскость которого параллельна плоскости поляризации падающего пучка света. Найти интенсивность света на выходе системы, если интенсивность падающего света  $I_0$ .

Ответ.  $I = I_0 \cos^4 \theta$ .

5.20. Поляризованный по кругу свет, интенсивность которого  $I_0$ , падает на поляризатор. Найти интенсивность света, прошедшего сквозь поляризатор.

Ответ.  $I = I_0/2$ .

5.21. Поляризованный по кругу свет, имеющий интенсивность  $I_0$ , падает на стопку из трех поляризаторов. Первый и последний поляризаторы «скрещены», а главная плоскость среднего образует угол  $\theta$  с главной плоскостью первого. Найти интенсивность света на выходе из системы.

Ответ.  $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ .

5.22. Очень большое число  $(N+1)$  поляроидов уложено в стопку. Главная плоскость последующего поляроида составляет угол  $\alpha$  с плоскостью предыдущего, так что главная плоскость последнего поляроида образует с плоскостью первого угол  $\theta = N\alpha$ . Пренебрегая потерями на отражение, найти интенсивность на выходе системы, если на стопку падает линейно поляризованный свет, направление поляризации которого параллельно главной плоскости первого поляроида.

Указание. Полагая угол  $\alpha$  очень малым, получите приближенное решение, ограничившись двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора.

Ответ.  $I \approx I_0(1 - \theta^2/2N)$ .

5.23. Между скрещенными николями помещена пластинка кварца, вырезанная параллельно оптической оси. Оптическая ось пластинки составляет угол  $45^\circ$  с главными направлениями николей. Рассчитать минимальную толщину пластинки, при которой одна линия водорода  $\lambda_1 = 6563 \text{ \AA}$  будет сильно ослаблена, а другая  $\lambda_2 = 4102 \text{ \AA}$  будет обладать максимальной интенсивностью. Для кварца  $\Delta n = 0,009$ .

Ответ.  $h = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2) \Delta n} \approx 0,07 \text{ мм}$ .

5.24. Пластинка  $P$  и клин  $K$  (рис. 66) вырезаны из различных положительных одноосных кристаллов и ориентированы так, что оптические оси их взаимно перпендикулярны. На каком рас-

стоянии от вершины клина будет наблюдаться в белом свете темная полоса при рассматривании этой системы между скрещенными николями  $P$  и  $A$ ? Толщина пластинки  $h$ , показатели преломления  $n_o$  и  $n_e$ , малый угол клина  $\alpha$ , показатели преломления клина

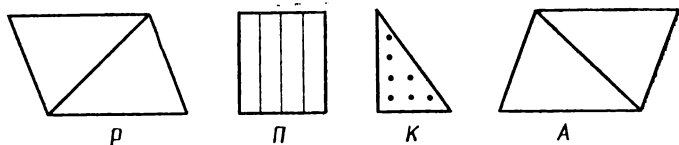


Рис. 66

$n_o'$  и  $n_e'$ . Пластика и клин находятся в диагональном положении относительно  $P$  и  $A$ .

Ответ. 
$$l = \frac{n_e - n_o}{n_e' - n_o'} \frac{h}{\alpha}.$$

5.25. Под каким углом надо поставить анализатор в условиях задачи 3.3.2, чтобы получить максимальную и минимальную интенсивности?

Ответ. При постоянном значении  $\delta$  интенсивность достигает экстремума при  $\cos 2\beta = 0$ , т. е. при  $\beta = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$ . Если  $\sin \delta > 0$ , то первому значению  $\beta$  отвечает максимум, а второму — минимум; при  $\sin \delta < 0$  — наоборот.

5.26. Клин из двоякопреломляющего вещества помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу. Оптическая ось параллельна ребру клина. Клин рассматривается через николь. В каких местах клина интенсивность будет минимальной, а в каких максимальной?

Ответ. Темные полосы наблюдаются в тех местах клина, для которых

$$\delta = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \text{ и т. д.}$$

Светлые полосы наблюдаются при

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi \text{ и т. д.}$$

5.27. Клин, описанный в предыдущей задаче, поворачивается вокруг направления распространения света. При каких положениях клина он будет освещен равномерно?

Ответ. При

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi.$$

5.28. Частично линейно поляризованный свет (смесь естественного света с линейно поляризованным) рассматривается через

анализатор. При повороте анализатора на  $60^\circ$  от положения, соответствующего максимальной яркости, интенсивность пучка уменьшается в два раза. Найти: 1) степень поляризации пучка

$$\Delta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  — максимальная и минимальная интенсивности света, проходящего через анализатор; 2) отношение интенсивностей естественного и линейно поляризованного света.

Ответ.  $\Delta = 1/2$ ;  $I_e/I_\pi = 1$ , где  $I_e$ ,  $I_\pi$  — интенсивности естественного и поляризованного света соответственно.

5.29. Линейно поляризованный свет, вышедший из поляризатора, проходит сквозь кристаллическую пластинку, создающую разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами  $\delta = 60^\circ$ . Главная плоскость поляризатора составляет угол в  $45^\circ$  с одним из главных направлений кристаллической пластинки. Найти угол между главными направлениями пластинки и полуосями эллипса колебаний полученного эллиптического поляризованного света, а также отношение полуосей упомянутого эллипса.

Ответ. Большая полуось эллипса направлена под углом  $45^\circ$  к главным направлениям пластинки. Отношение полуосей

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5.30. Главные диэлектрические проницаемости кристаллической пластинки равны  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ . На грань пластинки, параллельную координатной плоскости  $yz$ , в направлении оси  $x$  падает линейно поляризованная световая волна. При какой толщине  $h$  пластинки выходящая из нее волна будет иметь левую круговую поляризацию?

Ответ.  $h = \frac{(4m+1)\lambda}{4(\sqrt{\epsilon_y} - \sqrt{\epsilon_z})}$ , где  $m$  — целое число.

5.31. Какова должна быть наименьшая толщина  $h$  пластинки слюды, чтобы она могла служить в качестве пластинки в « $1/4$  волны» для света натрия ( $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ), если для этого света показатели преломления волн, идущих перпендикулярно к пластинке, соответственно равны  $n_1 = 1,5941$  и  $n_2 = 1,5887$ ?

Ответ.

$$h = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 0,027 \text{ мм.}$$

5.32. Вторые темные полосы (т. е. две полосы, из которых одной соответствует вносимая компенсатором разность хода  $2\lambda$ , а другой —  $2\lambda$ ) для натрового света в компенсаторе Бабинне (николи скрещены) располагаются на делениях компенсатора 7,34 и 27,20. На каких делениях расположатся вторые темные полосы для света лития? ( $\lambda_{Li} = 6708 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_{Na} = 5893 \text{ \AA}$ ).

Ответ. 5,97 и 28,57.

**5.33.** Найти положение первых темных полос (т. е. двух ближайших темных полос, лежащих по обе стороны от центральной светлой полосы) для зеленой линии ртути в компенсаторе Бабинне (николи параллельны), если первые темные полосы для натрового света располагаются на делениях 14,73 и 19,68 ( $\lambda_{\text{Na}} = 5893 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_{\text{Hg}} = 5461 \text{ \AA}$ ).

Ответ. 14,91 и 19,50.

**5.34.** Пластинка кварца толщиной в 1 мм, вырезанная перпендикулярно к оптической оси, помещена между параллельными николями. Для некоторой длины волны вращение плоскости поляризации равно  $20^\circ$ . При какой толщине кварца  $h$  свет данной волны будет полностью погашен?

Ответ.  $h = \frac{\pi}{2\alpha} = 4,5 \text{ мм}$ , где  $\alpha$  — вращательная способность пластинки.

**5.35.** Между параллельными николями помещена пластинка исландского шпата с осью, параллельной плоскости пластинки и наклоненной под углом  $45^\circ$  к плоскости поляризации света, проходящего через николь. При какой толщине  $h$  пластинки отфильтруется одна из линий дублета натрия ( $\lambda_1 = 5889,9 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_2 = 5895,9 \text{ \AA}$ ), если дисперсия показателя преломления исландского шпата вблизи дублета натрия представлена таблицей:

$\lambda, \text{ \AA}$	$n_o$	$n_e$
5876	1,65846	1,48647
5893	1,65836	1,48641

Ответ.

$$h = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \frac{1}{(n_o - n_e) - \lambda \left( \frac{dn_o}{d\lambda} - \frac{dn_e}{d\lambda} \right)} \approx 1,5 \text{ мм}.$$

**5.36.** Какую минимальную разность показателей преломления  $\Delta n$  право- и левокругополяризованных лучей ( $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ) можно обнаружить при слое вещества  $h = 30 \text{ см}$ , если измерить угол поворота плоскости поляризации с точностью до  $1^\circ$ ?

Ответ.

$$\Delta n = \frac{\varphi\lambda}{\pi h} \approx 1,1 \cdot 10^{-8}.$$

# **Раздел IX**

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ И МАГНИТООПТИКА**

### **1. Теоретический материал**

Фазовая и групповая скорости света. Связь между фазовой и групповой скоростями. Дисперсия. Элементарная теория дисперсии: силы, действующие на электрон в атоме, уравнение движения связанного электрона в поле плоской электромагнитной волны и его решение, выражение для показателя преломления в рамках классической теории дисперсии. Комплексный показатель преломления. Физический смысл действительной и мнимой частей комплексного показателя преломления. Нормальная и аномальная дисперсии. Экспериментальные методы изучения дисперсии. «Метод крюков» Д. С. Рождественского для изучения аномальной дисперсии. Дисперсия рентгеновских лучей. Особенности распространения электромагнитных волн в металлах и в плазме. Искусственная анизотропия. Эффект Керра. Использование эффекта Керра для устройства оптических затворов. Нормальный эффект Зеемана ('(«продольный» и «поперечный» эффекты Зеемана).  $\pi$ - и  $\sigma$ -компоненты спектральной линии во внешнем магнитном поле и характер поляризации этих компонент. Элементарная теория эффекта Зеемана. Зависимость величины расщепления спектральной линии от напряженности внешнего магнитного поля. Способы наблюдения эффекта Зеемана. Эффект Фарадея вращения плоскости поляризации во внешнем магнитном поле.

### **2. Вопросы к теоретическому материалу**

2.1. Дайте определение фазовой и групповой скоростей света.

2.2. Ремер измерял скорость света, наблюдая затмение спутников Юпитера, а Физо осуществил измерение скорости света в лабораторных условиях, используя метод «прерываний» с помощью зубчатого колеса. Какая скорость света измеряется этими методами — фазовая или групповая?

2.3. Напишите формулу Рэлея, связывающую фазовую и групповую скорости света.

2.4. Дайте определение дисперсии света. В чем заключается закон дисперсии?

2.5. Напишите уравнение движения для упругосвязанного



электрона в атоме. Какие силы действуют на упругосвязанный электрон?

2.6. Что такое нормальная и аномальная дисперсии?

2.7. Начертите график зависимости показателя преломления вещества от частоты распространяющегося света в случае наличия нескольких резонансных частот в рассматриваемой области спектра.

2.8. Каковы особенности дисперсии рентгеновских лучей?

2.9. В чем заключается метод скрещенных спектральных приборов? Каковы преимущества этого метода изучения дисперсии света по сравнению с другими методами?

2.10. Каковы экспериментальные трудности изучения аномальной дисперсии? В чем заключается сущность «метода крюков» Д. С. Рождественского?

2.11. Сформулируйте основную экспериментальную закономерность, характеризующую эффект Керра.

2.12. Начертите схему оптического затвора, принцип действия которого основан на использовании эффекта Керра.

2.13. Начертите принципиальную схему установки для наблюдения «продольного» и «поперечного» эффектов Зеемана.

2.14. Что такое  $\pi$ - и  $\sigma$ -компоненты спектральной линии при наблюдении эффекта Зеемана? Каков характер поляризации этих компонент?

2.15. Каким образом зависит величина расщепления спектральной линии в эффекте Зеемана от величины напряженности внешнего магнитного поля?

2.16. Каков физический механизм, приводящий к повороту плоскости поляризации линейно-поляризованного света, распространяющегося в веществе, помещенном в магнитное поле?

2.17. Каким образом угол поворота плоскости поляризации в эффекте Фарадея зависит от величины внешнего магнитного поля?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

3.1. (1-й тип). Задачи на вычисление групповой скорости света и на установление закона дисперсии в различных средах.

Метод решения. Используются определение фазовой и групповой скоростей света и формула Рэлея (формула (6) задачи 3.1.1), устанавливающая связь между этими скоростями.

3.2. (2-й тип). Задачи на вычисление зависимости показателя преломления от частоты электромагнитной волны в различных средах и в различных областях спектра.

Метод решения. Используются формулы задачи 3.2.1, выражающие зависимость показателя преломления от частоты и от характеристик среды.

3.3. (3-й тип). Задачи на расчет поляризационных эффектов,

связанных с искусственной анизотропией среды во внешнем электрическом поле (эффект Керра).

Метод решения. Используются формулы (1) и (2) задачи 3.3.1 для зависимости эффекта Керра от величины внешнего электрического поля.

3.4. (4-й тип). Задачи на расчет расщепления спектральных линий во внешнем магнитном поле (эффект Зеемана) и на вычисление поворота плоскости поляризации в магнитном поле (эффект Фарадея).

Метод решения. Используется формула (4) задачи 3.4.1, выражающая величину расщепления спектральной линии от напряженности внешнего магнитного поля и формула (1) задачи 3.4.2 для зависимости угла поворота плоскости поляризации от напряженности магнитного поля.

## б) ПРИМЕРЫ

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Рассматривая световой импульс, представляющий собой суперпозицию двух гармонических волн  $E_0 \cos(\omega t - kx)$  и  $E_0 \cos(\omega' t - k' x)$ , найти групповую скорость  $u$  этого импульса.

Решение. По условию задачи  $E = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos(\omega' t - k' x)$ , где  $E$  — суммарное излучение. Отсюда

$$E = 2E_0 \cos \left[ \frac{(\omega' - \omega)t}{2} - \frac{(k' - k)x}{2} \right] \cos \left[ \frac{(\omega' + \omega)t}{2} - \frac{(k' + k)x}{2} \right]. \quad (1)$$

Предположим далее, что частоты и волновые числа рассматриваемых колебаний отличаются друг от друга на бесконечно малые величины, т. е.

$$\begin{aligned} \omega' - \omega &= d\omega, \quad k' - k = dk, \\ \frac{\omega' + \omega}{2} &\cong \omega, \quad \frac{k' + k}{2} \cong k. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая эти соотношения, напомним

$$E = 2E_0 \cos \left( \frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x \right) \cos(\omega t - kx). \quad (3)$$

Полученное колебание представляет собой гармоническое колебание, характеризуемое частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ , с медленно меняющейся во времени и пространстве «амплитудой»

$$2E_0 \cos \left( \frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x \right).$$

Рассматриваемая «амплитуда» достигает максимального значения при

$$\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Назовем групповой скоростью волнового пакета (волнового импульса) скорость перемещения максимума амплитуды рассматриваемого пакета. Дифференцируя (4), находим

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5)$$

Отметим, что формула (5) предполагает функциональную зависимость частоты от волнового числа. Функция  $\omega = \omega(k)$  называется законом дисперсии. Закон дисперсии определяется свойствами среды, в которой распространяется свет.

**3.1.2.** Выразить групповую скорость  $u = \frac{d\omega}{dk}$  через фазовую скорость света  $v$  и  $dv/d\lambda$ , а также через  $v$  и  $dn/d\lambda$ .

**Решение.** По определению фазовой скорости

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (1)$$

где  $\omega$  и  $k$  — частота и волновое число гармонической волны соответственно. В свою очередь

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — длина рассматриваемой волны.

Дифференцируя (1) и (2), получим

$$dv = \frac{dk(kd\omega/dk - \omega)}{k^2} \quad (3)$$

$$dk = -2\pi d\lambda/\lambda^2. \quad (4)$$

Подставляя (4) и (2) в (3), находим

$$dv = -\frac{d\lambda}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d\omega}{dk} - \omega \right).$$

Отсюда

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\omega}{dk} + \frac{\omega}{2\pi},$$

или

$$\lambda \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{d\omega}{dk} + \frac{\omega}{k}. \quad (5)$$

Вспоминая определения групповой и фазовой скоростей, окончательно находим

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (6)$$

Формула (6) называется формулой Рэлея для фазовой и групповой скоростей.

Учитывая, что  $n = \frac{c}{v}$ , где  $c$  — скорость света в пустоте, аналогично находим

$$u = v \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (7)$$

**3.1.3.** В анизотропной среде фазовая скорость волны зависит не только от частоты  $\omega$ , но и от направления распространения волны. Если записать закон дисперсии в форме  $\omega = \omega(\vec{k})$ , то групповая скорость в такой среде будет вектором с компонентами  $\frac{d\omega}{dk_i}$  ( $i = x, y, z$ ). Показать, что в прозрачном однородном кристалле групповая скорость по величине и направлению совпадает с лучевой скоростью  $u$ .

Решение. Для простоты пренебрежем зависимостью тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}$  от частоты  $\omega$ . Перепишем формулу Френеля для нормальной скорости света (см. задачу 3.1.2 разд. VIII)

$$\sum_i \frac{N_i^2}{(v^2 - a^2_i)} = 0$$

в виде

$$\sum_i \frac{k^2_i}{\omega^2 - k^2 a^2_i} = 0 \quad (1)$$

(напомним, что  $N_i = \frac{v}{\omega} k_i$ ).

Продифференцируем (1) по  $k_j$ . В результате получим

$$\sum_i \frac{2k_i}{(\omega^2 - k^2 a^2_i)} \frac{\partial k_i}{\partial k_j} - \sum_i \frac{2\omega \frac{\partial \omega}{\partial k_j} k^2_i}{(\omega^2 - k^2 a^2_i)^2} + \sum_i \frac{a^2_i k^2_i \frac{\partial k^2}{\partial k_j}}{(\omega^2 - k^2 a^2_i)^2} = 0. \quad (2)$$

Так как  $k^2 = \sum_l k^2_l$ ,  $l = x, y, z$ , то

$$\frac{\partial k^2}{\partial k_j} = \sum_l 2k_l \frac{\partial k_l}{\partial k_j}.$$

В свою очередь,  $\frac{\partial k_l}{\partial k_j} = \delta_{lj}$ , где  $\delta_{lj}$  — символ Кронекера, определяемый следующим образом:

$$\delta_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = j, \\ 0, & \text{если } l \neq j. \end{cases}$$

Учитывая это, напомним

$$\frac{\partial k^2}{\partial k_j} = \sum_l 2k_l \delta_{lj} = 2k_j. \quad (3)$$

С учетом (3) и определения  $\delta$ -символа формула (2) перепишется следующим образом:

$$v \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \sum_i \frac{\frac{\omega}{v} k_i^2}{\frac{\omega^4}{v^4} (v^2 - a_i^2)^2} = \frac{k_j}{\frac{\omega^2}{v^2} (v^2 - a_j^2)} + k_j \sum_i \frac{a_i^2 k_i^2}{\frac{\omega^4}{v^4} (v^2 - a_i^2)^2}. \quad (4)$$

Вспомогательная связь между компонентами векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{k}$ , получим

$$v \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \sum_i \frac{N_i^2}{(v^2 - a_i^2)^2} = N_j \left[ \frac{1}{v^2 - a_j^2} + \sum_i \frac{N_i^2 a_i^2}{(v^2 - a_i^2)^2} \right]. \quad (5)$$

Из формулы (10) задачи 3.1.2 разд. VIII следует

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{N_i^2}{(v^2 - a_i^2)^2} &= \frac{1}{\epsilon_0^2 c^4} \frac{D^2}{(\vec{N}\vec{E})^2}; \\ \frac{1}{v^2 - a_j^2} &= - \frac{D_j}{\epsilon_0 c^2 (\vec{N}\vec{E}) N_j}; \\ \sum_i \frac{N_i^2 a_i^2}{(v^2 - a_i^2)^2} &= \frac{1}{\epsilon_0^2 c^4} \frac{\sum_i (a_i D_i)^2}{(\vec{N}\vec{E})^2} = \frac{c^2 \sum_i \frac{D_i^2}{\epsilon_i}}{\epsilon_0^2 c^4 (\vec{N}\vec{E})^2} = \\ &= \frac{\sum_i D_i \frac{D_i}{\epsilon_0 \epsilon_i}}{\epsilon_0 c^2 (\vec{N}\vec{E})^2} = \frac{\sum_i D_i E_i}{\epsilon_0 c^2 (\vec{N}\vec{E})^2} = \frac{(\vec{D}\vec{E})}{\epsilon_0 c^2 (\vec{N}\vec{E})^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (5), получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_j} = \frac{\epsilon_0 c^2}{v D^2} [N_j (\vec{E}\vec{D}) - D_j (\vec{E}\vec{N})], \quad (6)$$

( $j = x, y, z$ ).

Три равенства (6) запишем в виде одного векторного равенства

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\epsilon_0 c^2}{v D^2} [\vec{N} (\vec{E}\vec{D}) - \vec{D} (\vec{E}\vec{N})],$$

или

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\epsilon_0 c^2}{v D^2} [\vec{E} \times [\vec{N} \times \vec{D}]]. \quad (7)$$

Умножая первую формулу (12) задачи 3.1.2 разд. VIII векторно на  $\vec{N}$ , получим

$$[\vec{N} \times \vec{D}] = - \frac{1}{v} [\vec{N} \times [\vec{N} \times \vec{H}]] = \frac{1}{v} \vec{H}. \quad (8)$$

При выводе формулы (8) было использовано, что  $(\vec{N}\vec{H})=0$  (см. последнюю формулу (12) задачи 3.1.2 разд. VIII).

Подставляя (8) в (7), получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\epsilon_0 c^2}{v^2 D^2} [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (9)$$

Согласно формуле (14) задачи 3.1.1 разд. VIII

$$v^2 D^2 = (\vec{E} \cdot \vec{D}) / \mu_0. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{[\vec{E} \times \vec{H}]}{(\vec{E} \cdot \vec{D})}. \quad (11)$$

Известно, что  $[\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{S}$ , где  $\vec{S}$  — вектор Умова — Пойнтинга, который равен

$$\vec{S} = \omega u \vec{t}, \quad (12)$$

где  $\omega$  — плотность электромагнитной энергии,  $u$  — лучевая скорость,  $\vec{t}$  — единичный вектор вдоль луча. В случае плоских электромагнитных волн

$$\omega = (\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (13)$$

(см. задачу 3.1.5 разд. VIII). Подставляя (12) и (13) в (11), окончательно получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = u \vec{t}.$$

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** В среде, состоящей из неполярных молекул (т. е. молекул, дипольный момент которых в отсутствие внешнего поля равен нулю), распространяется плоская электромагнитная волна частоты  $\omega$ . Рассматривая взаимодействие волны со связанными электронами, найти зависимость показателя преломления среды от частоты электромагнитной волны.

Решение. Опыт показывает, что электроны в атомах и молекулах (так называемые «связанные» электроны) ведут себя так, как если бы при отклонении от положения равновесия на них действовала квазиупругая возвращающая сила

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}, \quad (1)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор смещения электрона от положения равновесия.

С другой стороны, в процессе колебаний электрон излучает электромагнитные волны, которые уносят энергию. Имеются и другие причины, приводящие к потерям энергии электроном, движущимся в атоме (молекуле). Энергетические потери можно учесть, если ввести в рассмотрение тормозящую силу, действующую на электрон:

$$\vec{F}_{\text{тор}} = -g\vec{r}, \quad (2)$$

где  $g$  — эффективный «коэффициент трения».

Наконец, электрон находится в поле внешней электромагнитной волны и на него со стороны этой волны действует сила Лоренца

$$\vec{F}_{\text{лор}} = e\vec{E} + e[\vec{r} \times \vec{B}],$$

где  $e$  — заряд электрона;  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  — векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции в электромагнитной волне соответственно.

Предположим, что скорость движения электрона  $\dot{\vec{r}}$  много меньше скорости распространения света в пустоте. В этом случае сила Лоренца записывается в виде

$$\vec{F}_{\text{лор}} = e\vec{E}. \quad (3)$$

С учетом (1)–(3) уравнение движения связанного электрона в поле внешней электромагнитной волны имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}, \quad (4)$$

где  $m$  — масса электрона. Поскольку по условию задачи электромагнитная волна является плоской монохроматической волной, т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

то уравнение (4) можно записать в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + 2\delta \dot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — «собственная» частота колебаний электрона в атоме (молекуле),  $\delta = g/2m$  — коэффициент затухания,  $\vec{E}_0$  — амплитуда напряженности электрического поля волны.

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

где  $\vec{r}_0$  — амплитуда смещения электрона. Подставляя (7) в (6) и производя необходимое дифференцирование, получим

$$\vec{r}_0 = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \quad (8)$$

Таким образом, под действием внешнего электрического поля плоской волны неполярная молекула приобретает дипольный момент

$$\vec{p} = e\vec{r} = \frac{e^2 \vec{E}}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \quad (9)$$

Вектор поляризации среды, по определению, дается выражением

$$\vec{P} = N\vec{p} = \frac{e^2 N}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \vec{E}, \quad (10)$$

где  $N$  — число молекул в единице объема. Из (10) видно, что поляризация среды пропорциональна напряженности внешнего электрического поля, т. е.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}. \quad (11)$$

Коэффициент  $\alpha$  в этом случае называется диэлектрической восприимчивостью среды. Из (10) и (11) следует, что

$$\alpha = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \quad (12)$$

Диэлектрические проницаемость  $\epsilon$  и восприимчивость  $\alpha$  среды связаны соотношением

$$\epsilon = 1 + \alpha. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (13), получим

$$\epsilon = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \quad (14)$$

Поскольку, с другой стороны,  $n = \sqrt{\epsilon}$ , где  $n$  — показатель преломления среды, то (14) принимает вид

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \quad (15)$$

Оценки показывают, что второе слагаемое в (15) является малой величиной по сравнению с единицей. В этом случае (15) можно записать в виде

$$n = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]} \quad (16)$$

Найденный нами показатель преломления среды является комплексной величиной, т. е.

$$n = n' + in'', \quad (17)$$

где  $n'$ ,  $n''$  — действительная и мнимая части комплексного показателя преломления.



Из (16) находим, что собственно показатель преломления

$$n' = 1 + \frac{e^2 N (\omega_0^2 - \omega^2)}{2\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]}. \quad (18)$$

Мнимая часть комплексного показателя преломления, как известно, описывает затухание электромагнитной волны в среде. График функции  $n'(\omega)$  изображен на рис. 67. Области вблизи собственной (резонансной) частоты  $\omega_0$  является областью «аномальной дисперсии».

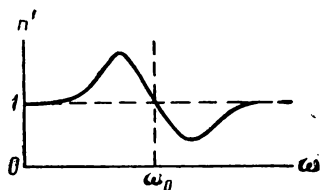


Рис. 67

**3.2.2. Высокочастотная электромагнитная волна** (например, рентгеновские лучи) распространяется в среде, характеризующейся числом молекул в единице объема  $N$ . Найти зависимость показателя преломления среды от частоты рассматриваемой волны.

**Решение.** Действительная часть комплексного показателя преломления (см. формулу (15) предыдущей задачи) имеет вид

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N (\omega_0^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]}. \quad (1)$$

Для высокочастотных колебаний  $\omega \gg \omega_0$ . Пренебрегая, поэтому, в (1) членами с  $\omega_0^2$  и  $\omega^2$  по сравнению с членами, содержащими  $\omega^4$ , получим

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega^2}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что показатель преломления, скажем, металла для рентгеновских лучей оказывается меньше единицы, т. е. для рентгеновских лучей металлическая среда оптически «менее плотна», чем воздушная, и при некоторых углах падения осуществляется полное «внутреннее» отражение.

Введем «критическую» частоту

$$\omega_k = \left( \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Тогда формула (2) записывается следующим образом:

$$n^2 = 1 - \left( \frac{\omega_k}{\omega} \right)^2. \quad (4)$$

При  $\omega_k > \omega$  второе слагаемое в знаменателе формулы (1) играет заметную роль. А это означает, что показатель преломления имеет мнимую часть и происходит поглощение волн. При  $\omega \gg \omega_k$  показатель преломления  $n \rightarrow 1$ , и среда, следовательно, становится прозрачной для прохождения лучей. Например, металлы в достаточной мере прозрачны для рентгеновских лучей.

**3.2.3.** Для измерения зависимости показателя преломления среды от длины волны вблизи резонансной полосы поглощения (область аномальной дисперсии) Д. С. Рождественский предложил метод, в котором в одно из плеч интерферометра Жамена, скрещенного со спектро스코пом, вводится слой паров исследуемого вещества, а в другое — стеклянная пластинка. При этом в наблюдаемой интерференционной картине появляются так называемые «крюки». Найти выражение для  $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\text{газ}}$  ( $\lambda$  — длина волны в вакууме) в вершине «крюка», т. е. в точке, в которой касательная к интерференционной полосе горизонтальна, если толщина стеклянной пластинки —  $l_{\text{ст}}$ , толщина газового слоя —  $l_{\text{газ}}$ , а показатель преломления стекла —  $n_{\text{ст}}$ .

**Решение.** Если на щель спектроскопа сфокусировать систему горизонтальных интерференционных полос, получаемых от белого источника света, то наблюдаемый спектр будет пересечен темными полосами, слабо сужающимися от красного конца спектра к фиолетовому, поскольку спектроскоп «растягивает» белый свет в горизонтальном направлении, а интерференционный максимум  $m$ -го порядка оказывается «растянутым» по вертикали. При этом нулевая полоса (т. е. полоса, которой соответствует нулевая разность хода) горизонтальна. Обозначим через  $y_m$  расстояние интерференционной полосы  $m$ -го порядка от положения нулевой полосы. Известно, что это расстояние пропорционально порядку  $m$  и длине волны  $\lambda$ , т. е.

$$y_m = am\lambda, \quad (1)$$

где  $a$  — постоянная прибора. (Отметим, что  $y_m/a$  — разность хода между интерферирующими лучами.)

Если в одно из плеч интерферометра ввести слой газа толщиной  $l_{\text{газ}}$ , то это приведет к образованию дополнительной разности хода

$$d' = l_{\text{газ}}n_{\text{газ}} - l_{\text{газ}} = (n_{\text{газ}} - 1)l_{\text{газ}} \quad (2)$$

и рассматриваемая полоса займет положение

$$y_m = am\lambda + a(n_{\text{газ}} - 1)l_{\text{газ}}. \quad (3)$$

При этом за счет дисперсии показателя преломления газа появится дополнительный наклон рассматриваемой полосы к горизонтали по сравнению с тем случаем, когда газа не было.

Если в другое плечо интерферометра внесена стеклянная пластинка толщиной  $l_{\text{ст}}$ , то эта пластинка частично компенсирует разность хода (2) за счет внесения разности хода между интерферирующими лучами:

$$d'' = (n_{\text{ст}} - 1)l_{\text{ст}}. \quad (2')$$

Рассматриваемая полоса теперь занимает положение

$$y_m = am\lambda + a(n_{\text{газ}} - 1)l_{\text{газ}} - a(n_{\text{ст}} - 1)l_{\text{ст}}. \quad (4)$$

Компенсируется также и наклон полос, обусловленный внесением в плечо интерферометра газового слоя. При этом найдется такая длина волны и соответствующий ей показатель преломления газа, при которых наклоны полосы, обусловленные внесением в плечи интерферометра газового слоя и стеклянной пластинки, полностью компенсируются, и интерференционная полоса приобретает вид «крюка», в вершине которого касательная к полосе горизонтальна. Таким образом, в вершине «крюка» выполняется условие

$$\frac{dy_m}{d\lambda} = 0. \quad (5)$$

Дифференцируя (4) по  $\lambda$  и учитывая условие (5), получим

$$\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\text{газ}} = -\frac{m}{l_{\text{газ}}} + \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\text{ст}} \frac{l_{\text{ст}}}{l_{\text{газ}}}. \quad (6)$$

Формула (6) позволяет по известной дисперсии стекла  $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\text{ст}}$  вычислить дисперсию газа вблизи полосы поглощения.

Обычно порядок интерференции  $m = \frac{l_{\text{ст}}(n_{\text{ст}} - 1)}{\lambda}$  велик (несколько тысяч), и поэтому последним членом в (6) можно пренебречь, т. е.

$$\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\text{газ}} \approx -\frac{m}{l_{\text{газ}}} = -\frac{(n_{\text{ст}} - 1)}{\lambda} \frac{l_{\text{ст}}}{l_{\text{газ}}}. \quad (7)$$

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Ячейка Керра представляет собой конденсатор длины  $l=5$  см с расстоянием между пластинками  $d=1$  мм, помещенный в нитробензол, для которого постоянная Керра  $B=2 \cdot 10^{-5} \text{ г}^{-1} \text{ с}^2$ .

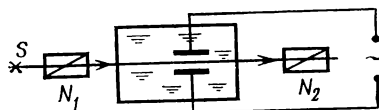


Рис. 68

Все устройство находится между «параллельными» никелями и освещается монохроматическим светом (рис. 68). К конденсатору подведено переменное напряжение с амплитудой 6000 В от генератора с частотой  $\nu=10^7$  Гц. Определить число прерываний светового пучка, осуществляемых описанной установкой.

**Решение.** Если молекулы жидкости, в которую помещен конденсатор, обладают дипольными электрическими моментами (полярные молекулы), то при подаче напряжения на пластины конденсатора они будут выстраиваться вдоль силовых линий электрического поля. Физические свойства такого рода жидкости будут различными в разных направлениях. В оптическом отноше-

нии жидкость между пластинами конденсатора подобна одноосному кристаллу с оптической осью, параллельной направлению силовых линий поля. Если через эту жидкость пропустить линейно поляризованный свет, то он будет распадаться на обыкновенную и необыкновенную волны, распространяющиеся с разными скоростями. Опыт показывает, что для монохроматического света данной длины волны разность между соответствующими показателями преломления оказывается пропорциональной квадрату напряженности электрического поля (эффект Керра), т. е.

$$n_e - n_o = kE^2, \quad (1)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент.

Пройдя путь  $l$ , указанные лучи приобретают разность хода

$$d = l(n_e - n_o) = klE^2. \quad (2)$$

Если эта разность хода окажется кратной длине волны света  $\lambda$ , то свет сквозь описанное устройство проходить не будет (см. задачу 3.3.1 разд. VIII). Таким образом, условие прерывания светового пучка ячейкой Керра имеет вид  $m\lambda = klE^2$ , или

$$m = BE^2, \quad (3)$$

где  $B = \frac{k}{\lambda}$  — постоянная Керра.

При питании конденсатора переменным напряжением напряженность поля  $E$  за четверть периода изменяется от нуля до амплитудного значения

$$E_0 = \frac{U_0}{d}, \quad (4)$$

где  $U_0$  — амплитудное значение напряжения,  $d$  — расстояние между пластинами конденсатора. При этом условие прерывания светового пучка (3) выполняется  $m = Bl \frac{U_0^2}{d^2}$  раз. Подставляя сюда численные значения из условия задачи, получим, что  $m = 4$ . За период, следовательно, световой пучок прервется 16 раз. Таким образом, описанное устройство осуществляет  $16\nu = 1,6 \cdot 10^8$  прерываний в секунду.

#### 4-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Газоразрядная трубка, излучающая свет с длиной волны  $\lambda_0 = 6000$  Å, помещена между полюсами сильного электромагнита (рис. 69), создающего магнитное поле напряженностью  $H = 8,3 \cdot 10^6$  А/м. При наблюдении спектра излучения в направлении, параллельном направлению силовых линий магнитного поля, вместо одной спектральной линии видны две линии, длины волн которых отличаются от  $\lambda_0$  на величину  $\pm \Delta\lambda$  (продольный эффект Зеемана). Вычислить изменение длины волны спектральной ли-

нии  $\Delta\lambda$  в магнитном поле и определить характер поляризации наблюдаемого излучения.

**Решение.** Колебательное движение связанного электрона в отсутствие магнитного поля в каждый момент времени может быть разложено на два колебательных движения: вдоль оси  $z$  (ось  $z$  направлена по силовым линиям магнитного поля) и перпендику-

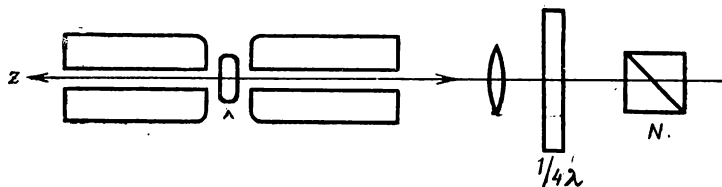


Рис. 69

лярно этой оси. При этом гармоническое движение электрона с частотой  $\omega_0$  в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , можно представить в виде правого и левого круговых равномерных движений с частотой  $\omega_0$ . При включении магнитного поля на электрон наряду с квазиупругой силой начнет действовать сила Лоренца

$$\vec{F}_L = -e [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1)$$

Так как сила Лоренца действует в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , это означает, что наличие этой силы не изменит характера движения электрона вдоль оси  $z$ , т. е. в этом направлении электрон будет продолжать гармоническое движение с частотой  $\omega_0$ . Что же касается движения электрона в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ ,

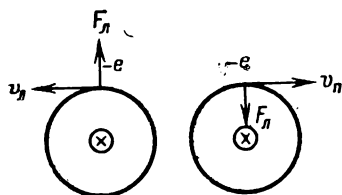


Рис. 70

то сила Лоренца приводит к изменению частоты круговых движений электрона по сравнению с тем случаем, когда поле отсутствовало. Новые частоты круговых движений электрона определяются из следующих условий:

$$kr - ev_L B = m\omega_L^2 r \quad (\text{для левого движения}),$$

$$kr + ev_L B = m\omega_L^2 r \quad (\text{для правого движения}) \quad (\text{рис. 70}).$$

Поскольку  $v_L = \omega_L r$ ,  $v_L = \omega_L r$ , написанные равенства принимают вид

$$\begin{aligned} m\omega_L^2 + e\omega_L B - k &= 0, \\ m\omega_L^2 - e\omega_L B - k &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая (2) относительно  $\omega_{\text{л}}$  и  $\omega_{\text{п}}$ , получим

$$\begin{aligned}\omega_{\text{л}} &= -\frac{1}{2} \frac{e}{m} B \pm \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{1}{4} \frac{e^2 B^2}{m^2}}; \\ \omega_{\text{п}} &= \frac{1}{2} \frac{e}{m} B \pm \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{1}{4} \frac{e^2 B^2}{m^2}}.\end{aligned}\quad (3)$$

Квадратные корни можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{1}{4} \frac{e^2 B^2}{m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{e^2 B^2}{m^2 \omega_0^2}} \approx \omega_0,$$

так как обычно частота  $\omega_0$  довольно велика и

$$\frac{e^2 B^2}{m^2 \omega_0^2} \ll 1.$$

С учетом этого равенства (3) принимает вид (частота  $\omega_0$  положительна!):

$$\begin{aligned}\omega_{\text{л}} &= \omega_0 - \frac{1}{2} \frac{e}{m} B; \\ \omega_{\text{п}} &= \omega_0 + \frac{1}{2} \frac{e}{m} B.\end{aligned}$$

Изменение частоты

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \pm \frac{1}{2} \frac{e}{m} B.$$

Этому изменению частоты соответствует изменение длины волны

$$\Delta\lambda = \pm \frac{e\lambda^2}{4\pi mc} B = \frac{e\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} H = 1,76 \text{ \AA}.\quad (4)$$

Из решения задачи ясно, что более коротковолновая компонента расщепленной спектральной линии будет поляризована по правому кругу, более длинноволновая — по левому.

**3.4.2. Эффект Фарадея** заключается в том, что линейно поляризованный свет, распространяющийся в веществе, помещенном в магнитное поле, испытывает поворот плоскости поляризации. Опыт показывает, что угол поворота плоскости поляризации в магнитном поле  $H$  при прохождении слоя вещества толщины  $l$  определяется выражением

$$\varphi = RH, \quad (1)$$

где  $R$  — постоянная. Выразить постоянную  $R$  через показатели преломления  $n_-$  и  $n_+$  для право- и левокругополяризованного света, проходящего вдоль линий магнитного поля.

**Решение.** Пусть внешнее магнитное поле  $\vec{H}$  перпендикулярно к плоскости чертежа и направлено на нас. И пусть в этом же направлении распространяется электромагнитная волна. Разложим эту волну на две компоненты, поляризованные по правому

и левому кругу. В начальный момент электрические векторы этих компонент параллельны и направлены вдоль  $OA$  (рис. 71). При прохождении слоя вещества толщины  $l$  электрический вектор  $\vec{E}$  первой компоненты повернется на угол

$$\delta_- = \frac{2\pi}{\lambda_-} l, \quad (2)$$

где  $\lambda_-$  — длина волны рассматриваемой компоненты в веществе, которая связана с длиной волны в вакууме соотношением

$$\lambda_- = \frac{\lambda_0}{n_-}. \quad (3)$$

(В свою очередь,  $n_-$  — соответствующий показатель преломления). Подставляя (3) в (2), получим

$$\delta_- = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_- l. \quad (4)$$

Аналогично электрический вектор второй компоненты  $\vec{E}_+$  повернется против часовой стрелки на угол

$$\delta_+ = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_+ l. \quad (5)$$

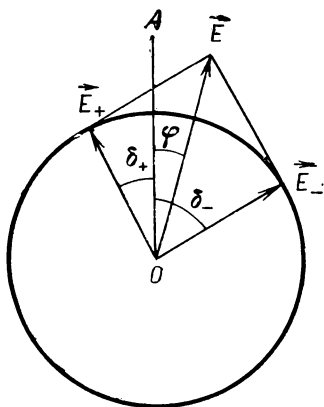


Рис. 71

Результирующий вектор  $\vec{E}$  делит угол между  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  пополам и определяет новое направление плоскости колебаний. Эта плоскость оказывается повернутой относительно исходного положения на угол  $\varphi$ . Вращение плоскости колебаний считается положительным, когда оно происходит по часовой стрелке, если смотреть навстречу световому пучку. Таким образом, угол поворота плоскости колебаний равен

$$\varphi = \frac{\delta_- - \delta_+}{2} = \frac{\pi l}{\lambda_0} (n_- - n_+). \quad (6)$$

Сравнивая (6) с (1), находим

$$R = \frac{\varphi}{lH} = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) \frac{1}{H}. \quad (7)$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Чем объясняется, что соотношение  $n = \sqrt{\epsilon}$ , где  $n$  — показатель преломления, а  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная, так резко нарушается для воды в оптической области электромагнитного спектра?

4.2. Какова разница между лучевой скоростью света, введенной в разд. VIII для обозначения скорости распространения энергии в анизотропной среде, и групповой скоростью света, рассматриваемой в данном разделе.

4.3. В области аномальной дисперсии  $\frac{dv}{d\lambda} < 0$  ( $v$  — фазовая скорость,  $\lambda$  — длина волны в среде). В этой области возможен случай, когда групповая скорость  $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$  будет больше скорости света  $c$  в вакууме. Как согласовать это с выводом теории относительности о невозможности сигналов, распространяющихся со скоростью больше  $c$ ?

4.4. Показать, что в том случае, когда связь между фазовой и групповой скоростями электромагнитных волн имеет вид  $u = c^2/v$ , фазовая скорость электромагнитных волн превосходит скорость света в вакууме.

4.5. Может ли показатель преломления быть меньше единицы?

4.6. Диэлектрическая проницаемость плазмы  $\epsilon(\omega)$  отрицательна, если  $\omega < \omega_h$  (см. задачу 5.7). В этом случае показатель преломления  $n = \sqrt{\epsilon} = \pm i\kappa$  — чисто мнимая величина. Выяснить физический смысл чисто мнимого показателя преломления.

4.7. Радиоволна распространяется вверх. Волны каких частот могут проходить через ионосферу? Какие волны будут полностью отражаться?

4.8. Какая картина будет наблюдаться в спектрокопе, если на его щель сфокусирована система горизонтальных интерференционных полос, получаемых от источника белого света? Как изменится эта картина, если в одно из плеч интерферометра ввести стеклянную пластинку?

4.9. Как изменится картина, наблюдаемая в спектрокопе, скрещенном с интерферометром Жамена, если изменять толщину и дисперсию вносимой в одно из плеч стеклянной пластинки? Как изменится картина при переносе стеклянной пластинки из одного плеча в другое?

4.10. Какой вид будет иметь интерференционная картина (см. вопрос 4.8), если в одном из плеч интерферометра находится слой паров натрия, а в другом — стеклянная пластинка? Рассмотреть вид полос вблизи линии поглощения натрия.

4.11. Какова должна быть разрешающая способность дифракционной решетки, могущей разрешить зеемановские компоненты в условиях задачи 3.4.1?

4.12. Изменится ли разность между показателями преломления «обыкновенного» и «необыкновенного» лучей в установке Керра при изменении направления электрического поля?

4.13. Нормальный эффект Зеемана наблюдается так, что на-



правление наблюдения совпадает с направлением силовых линий. Какая из компонент имеет правую круговую поляризацию и какая левую?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии ( $v$  — фазовая скорость): 1)  $v=a$  ( $a=\text{const}$ ) — недиспергирующая среда, например звуковые волны в воздухе; 2)  $v=a\sqrt{\lambda}$  — волны на поверхности воды, вызываемые силой тяжести; 3)  $v=\frac{a}{\sqrt{\lambda}}$  — капиллярные волны; 4)  $v=\frac{a}{\lambda}$  — поперечные колебания стержня; 5)  $v=\sqrt{c^2+a^2\lambda^2}$  — электромагнитные волны в ионосфере ( $c$  — скорость света в вакууме).

Ответ.

$$1) u=v; 2) u=\frac{v}{2}; 3) u=\frac{3}{2}v; 4) u=2v; 5) u=\frac{c^2}{v}.$$

5.2. При каком законе дисперсии немагнитной среды  $\epsilon=\epsilon(\omega)$ , заполняющей бесконечное пространство, связь между фазовой и групповой скоростями электромагнитных волн принимает вид  $vu=c^2$ ?

Ответ.  $\epsilon=1+\frac{A}{\omega^2}$ , где  $A$  — постоянная.

5.3. Пусть электромагнитное излучение распространяется в немагнитной среде с законом дисперсии  $\epsilon=\epsilon(\omega)$ . Тогда  $n(\omega)=[\epsilon(\omega)]^{1/2}$ . В соответствии с теорией относительности сигнал не может распространяться со скоростью, большей, чем  $c=3\cdot 10^{10}$  см/с. Какое ограничение накладывает это условие на возможную зависимость  $\epsilon$  от  $\omega$ ? (Считаем, что  $\epsilon(\omega)$  положительно для всех  $\omega$ .)

Ответ.

$$\omega \left( \frac{dn}{d\omega} \right) + n(n-1) \geq 0.$$

5.4. При распространении волн в глубокой воде закон дисперсии имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho},$$

где  $g=980$  см/с<sup>2</sup>,  $T=72$  дн,  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>. Получить выражение для фазовой и групповой скоростей волн. При какой длине волн групповая скорость равна фазовой? Вычислить эту скорость.

Ответ.

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}}; \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho}} = 1,7 \text{ см}$$

$$u = \frac{g + 3 \frac{T}{\rho} k^2}{2 \sqrt{gk + \frac{Tk^3}{\rho}}}; \quad v = u = 2 \sqrt{\frac{T\pi}{\lambda\rho}} = 23,1 \text{ см/с.}$$

5.5. Предположим, что в стекле дисперсия определяется одним резонансом с частотой  $\omega_0$ . Какой вид имеет закон дисперсии  $\omega = \omega(k)$  в этом случае, если затуханием пренебречь?

Ответ.

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega^2 k}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \text{ где } \omega^2 k = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}.$$

В свою очередь,  $N$  — число резонирующих электронов в единице объема.

5.6. В условиях предыдущей задачи вычислить групповую скорость света.

Ответ.

$$u^2 = c^2 \frac{1 + \frac{\omega^2 k}{\omega_0^2 - \omega^2}}{\left[ 1 + \frac{\omega^2 k \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right]^2},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

5.7. Получить формулу для диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega)$  ионизированного газа (плазмы) в монохроматическом электрическом поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ . Столкновениями электронов и ионов пренебречь.

Ответ.

$$\epsilon = 1 - \frac{e_e^2 N_e}{\epsilon_0 m_e \omega^2} - \sum \frac{e_n^2 N_n}{\epsilon_0 m_n \omega^2},$$

где  $N_e$  и  $N_n$  — концентрации электронов и ионов;  $e_e, e_n, m_e, m_n$  — их заряды и массы. В силу квазинейтральности ионосферы концентрация положительных ионов с большой точностью равна сумме концентраций электронов и отрицательных ионов. Поэтому последним слагаемым в выражении для  $\epsilon$  можно пренебречь, поскольку масса иона велика по сравнению с массой электрона. В результате

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_K^2}{\omega^2}, \quad \omega_K^2 = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}$$

(см. задачу 3.2.2).

5.8. Найти показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны  $1,56 \text{ \AA}$ , предполагая, что электроны в алюминии имеют собственную частоту, много меньшую, чем частота рентгеновских лучей. Число электронов в единице объема  $N \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

Ответ.  $1 - n = \frac{Ne^2 \lambda^2}{8\pi^2 c^2 \epsilon_0 m} \approx 6,5 \cdot 10^{-7}.$

Экспериментальное значение составляет

$$1 - n = 8,4 \cdot 10^{-6}.$$

5.9. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой  $\nu = 100 \text{ мкс}^{-1}$  равен  $n = 0,9$ . Определить плотность электронов в  $1 \text{ см}^3$  ионосферы.

Ответ.

$$N = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m (1 - n) \nu^2}{e^2} \approx 10^6 \text{ см}^{-3}.$$

5.10. Радиосигнал определенной частоты  $\nu$  посылается вверх и отражается на определенной высоте. Определить концентрацию электронов в точке отражения.

Ответ.

$$N = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m}{e^2} \nu^2.$$

5.11. Концентрация электронов на Солнце на расстоянии  $r = 0,06 R$  от границы фотосферы ( $R = 6,95 \cdot 10^{10} \text{ см}$  — радиус Солнца) примерно равна  $N \approx 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ . Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигать Земли, если длина волны (в вакууме) равна: 1)  $\lambda = 1 \text{ м}$ ; 2)  $\lambda = 10 \text{ м}$ ; 3)  $\lambda = 50 \text{ м}$ ?

Ответ. Чтобы радиоволна могла достигнуть Земли, ее длина волны должна быть

$$\lambda < \frac{3,34}{\sqrt{N}} \cdot 10^6 \text{ см} = 2,3 \text{ м}.$$

5.12. Получить выражение для фазовой скорости радиоволны в ионосфере в зависимости от длины волны  $\lambda$ .

Ответ.

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \lambda^2}.$$

5.13. Для достижения совпадения классической теории дисперсии с опытом надо в формулах классической теории заменить число резонирующих электронов в единице объема  $N$  на число  $fN$ , где  $f$  называется силой осциллятора. В опыте Рождественского расстояние между вершинами «крюков» с двух сторон резонансной линии  $\lambda_0$  в длинах волн равно  $2\Delta\lambda$ , толщина стеклянной пластинки и слоя исследуемого газа —  $l_{\text{ст}}$  и  $l$  соответственно, показатель преломления стекла пластинки  $n_{\text{ст}}$ . Определить силу осциллятора  $f$ , соответствующую данной линии.

Указание. При решении принять во внимание, что показатель преломления газа близок к единице и затухание мало.

Ответ.

$$f \approx \frac{16\pi^2 mc^2 \epsilon_0}{Ne^2 \lambda_0^4} \frac{l_{\text{ст}}}{l} (n_{\text{ст}} - 1) (\Delta\lambda)^2.$$

5.14. Определить разность  $n_o - n_e$  ( $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления «обыкновенного» и «необыкновенного» лучей) при наблюдении эффекта Керра в нитробензоле в поле напряженностью в

3000 В/см. Постоянная Керра  $B=220 \cdot 10^{-7} \text{ г}^{-1} \text{ с}^2$  (при  $t=20^\circ \text{ С}$  и  $\lambda_0=5890 \text{ \AA}$ ).

Ответ.  $n_o - n_e = B\lambda_0 E^2 \approx 0,13 \cdot 10^{-6}$ .

5.15. Определить в условиях предыдущей задачи сдвиг фаз  $\delta$ , возникающий между компонентами света, поляризованного по полю и перпендикулярно к полю. Длина пластин конденсатора равна 4 см.

Ответ.  $\delta = 2\pi B l E^2 \approx 3,53^\circ$ .

5.16. Какова должна быть напряженность поля в условиях предыдущей задачи, чтобы  $\delta = \pi/2$ ?

Ответ.  $E \approx 16\,000 \text{ В/см}$ .

5.17. На ячейку Керра падает свет, поляризованный под углом  $45^\circ$  к полю. Сдвиг фаз, вносимый ячейкой, равен  $\pi/2$ . Какова интенсивность света  $I$ , проходящего через николю, поставленный за конденсатором Керра и пропускающий свет, плоскость поляризации которого перпендикулярна к плоскости поляризации падающего света?

Ответ.  $I = \frac{1}{2} I_0$ , где  $I_0$  — интенсивность света, падающего на ячейку.

5.18. Рассмотреть движение упруго связанного электрона во внешнем магнитном поле и показать, что движение при наличии поля отличается от движения при его отсутствии наложением равномерного вращения (прецессии) вокруг направления поля с ларморовой частотой  $\omega_L = \frac{eB}{2m}$ . Предполагается, что частота  $\omega_L$  мала по сравнению с собственной частотой упруго связанного электрона.

Указание. Если ось  $z$  системы координат направить по направлению поля  $B$ , то уравнения движения упруго связанного электрона имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} \dot{y} B,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{e}{m} \dot{x} B,$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Решение задачи сводится к нахождению общего интеграла двух первых уравнений при условии, что  $\omega_L = \frac{eB}{2m} \ll \omega_0$ . Этот общий интеграл легко находится, если ввести новую переменную

$$\xi = x + iy.$$

5.19. Определить отношение заряда электрона  $e$  к его массе  $m$ , если известно, что «продольное» зеемановское расщепление спектральной линии с  $\lambda=6000 \text{ \AA}$  в магнитном поле напряженности  $H=8,3 \cdot 10^6 \text{ А/м}$  равно  $3,5 \text{ \AA}$ .

5.20. Постоянная магнитного вращения плоскости поляриза-

ции  $R$  для  $\text{CS}_2$  равна  $0,04347$  дуг. мин.  $\text{Э}^{-1}\text{см}^{-1}$  (при  $0^\circ\text{C}$  и  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ). Найти угол, на который поворачивается плоскость поляризации света при его прохождении через слой  $\text{CS}_2$  толщиной в  $1 \text{ см}$ , находящийся в поле  $10\,000 \text{ Э}$ .

Ответ.  $\varphi = 7^\circ 14,7'$ .

5.21. Определить постоянную  $R$  для железа, если известно, что слой железа в  $10^{-3} \text{ см}$  поворачивает плоскость поляризации на  $130^\circ$  в поле  $10\,000 \text{ Э}$  при  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ .

Ответ.  $R = 780$  дуг. мин.  $\text{Э}^{-1}\text{см}^{-1}$ .

5.22. Показать, что  $n_- - n_+ \approx 2 \frac{\partial n}{\partial \omega} \omega_L$ , где  $\omega_L = \frac{eB}{2m}$  — угловая скорость прецессии электронных орбит в магнитном поле,  $n_-$  и  $n_+$  — показатели преломления для световых лучей соответственно с правой и левой круговой поляризацией. Получить отсюда формулу для постоянной  $R$ .

Указание. В среде, имеющей лишь одну линию поглощения, показатель преломления является функцией  $\omega^2 - \omega_0^2$ , т. е.  $n = n(\omega^2 - \omega_0^2)$ . Разложив движение электрона на три колебания (одно вдоль магнитного поля и два круговых, происходящих в плоскости, перпендикулярной полю), приходим к выводу, что при наложении магнитного поля частота кругового колебания, совершающегося против часовой стрелки (если смотреть против направления магнитного поля), будет равна  $\omega_0 + \omega_L$ . Соответствующий показатель преломления

$$n_+ = n\{\omega^2 - (\omega_0 + \omega_L)^2\}.$$

Пользуясь условием  $\omega_L \ll \omega_0$ ,  $\omega$ , разложить полученное выражение в ряд Тейлора и ограничиться членами первого порядка малости.

Ответ.  $R = -\frac{e}{2\varepsilon_0 mc^3} \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0},$

где  $e$  — заряд электрона (величина отрицательная!),  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Полученная формула относится к веществам, молекулы которых не имеют постоянного магнитного момента.

5.23. Определить отношение заряда электрона к его массе  $m$ , если известно, что угол магнитного вращения  $\varphi$  для водорода при давлении  $85 \text{ атм}$  равен  $0,063'$ ;  $\lambda_0 \partial n / \partial \lambda_0 = 0,0625 \cdot 10^{-4}$  ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ );  $l = 1 \text{ см}$ ;  $H = 10\,000 \text{ Э}$ .

Ответ.  $\frac{e}{m} = -5,28 \cdot 10^{17} \text{ ед. CGSE.}$

5.24. Линейно-поляризованное радиоизлучение от одной из радиогалактик проходит через область ионизованного межзвездного газа в направлении магнитного поля с напряженностью  $H = 10^{-4} \text{ Э}$ . Средняя концентрация электронов  $N = 1 \text{ см}^{-3}$ , размер области  $L = 10^{18} \text{ см}$ . Найти угол поворота плоскости поляризации для излучения с длиной волны  $\lambda = 10 \text{ см}$ .

Ответ.  $\varphi = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m^2 c^3} \frac{HNL}{\omega^2} \cong 1 \text{ рад.}$

## **Раздел X**

### **ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.**

### **СПОНТАННОЕ И ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ**

#### **1. Теоретический материал**

Излучательная и поглощательная способность тел. Абсолютно черное тело. Законы Кирхгофа. Экспериментальные данные по излучению абсолютно черного тела. Формула Рэлея — Джинса и ее теоретические предпосылки. Формула Вина и ее теоретические предпосылки. Формула излучения Планка. Формула Стефана — Больцмана. Формула смещения Вина. Расчет излучения тела, которое не является абсолютно черным. Противоречие формулы Планка закономерностям классической физики. Необходимость квантования энергии. Спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна. Принцип детального равновесия. Связь между коэффициентами Эйнштейна и вывод формулы Планка. Недостатки полуклассического вывода формулы Планка. Основные свойства индуцированного излучения. Принцип работы квантового усилителя и генератора. Лазеры. Механизмы возбуждения, осуществляющие инверсию населенностей уровней. Метод пространственного разделения энергетических состояний. Оптическая накачка. Механизм резонансного соударения. Метод инжекции электронов в зону проводимости в полупроводниковых лазерах. Другие методы. Лазеры на органических красителях. Порог генерации. Роль переходных процессов при работе лазера в импульсном режиме. Модуляция добротности и получение очень больших мощностей излучения. Многомодовый режим работы лазеров. Методы уменьшения числа мод. Одномодовый режим как метод получения больших времен когерентности. Причины «зернистости» лазерного луча при диффузном отражении от твердой поверхности. Причины исчезновения «зернистости» при отражении от поверхности жидкости.

#### **2. Вопросы по теоретическому материалу**

**2.1.** Как связаны между собой излучательная и поглощательная способности тела?

**2.2.** Укажите способы реализации абсолютно черного тела в эксперименте.

**2.3.** Каким образом подсчитывается число колебаний в единице объема с частотами в интервале между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ ? Чему это число колебаний равно?

2.4. Зная число колебаний с частотами между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ , какие теоретические предпосылки нужно сделать, чтобы получить формулы Рэлея — Джинса и Вина? При каких условиях они являются следствием формулы излучения Планка?

2.5. Получите формулу смещения Вина и формулу Стефана — Больцмана из формулы излучения Планка. Выразите постоянные, входящие в эти формулы через фундаментальные константы.

2.6. Какова роль спонтанного излучения в ослаблении интенсивности проходящего через среду света? Опишите молекулярную картину процессов, приводящих к ослаблению света.

2.7. При очень больших интенсивностях проходящего через поглощающую среду света наступает увеличение прозрачности среды. Опишите физику процессов, приводящих к этому явлению.

2.8. Откуда следует, что коэффициенты Эйнштейна для вынужденных переходов с верхнего уровня на нижний и с нижнего уровня на верхний равны между собой?

2.9. В чем состоит сущность принципа детального равновесия? Почему равновесие называется детальным?

2.10. Как устроены резонаторы электромагнитных колебаний в диапазонах радиоволн и световых волн?

2.11. Перечислите основные отличительные характеристики излучения лазера.

2.12. Каким образом лазер используется для записи и воспроизведения тонкослойных голограмм? Расскажите, как можно восстановить изображение на тонкослойной голограмме без лазера, используя тепловой источник излучения. Каковы требования к этому источнику?

2.13. Опишите принцип измерения расстояний с помощью лазеров.

2.14. Каким образом с помощью лазерного излучения можно измерить скорость света на малой базе?

2.15. Опишите принцип устройства лазерного гироскопа.

2.16. Что означает утверждение, что лазерный луч может нести очень большой объем информации в сравнении, например, с метровыми радиоволнами? Как подсчитать, во сколько раз больший?

2.17. Опишите какой-либо метод модуляции интенсивности лазерного луча.

2.18. В чем состоят основные методы возбуждения лазеров?

2.19. В чем состоит главное отличие лазеров на органических красителях от других типов лазеров?

2.20. Каким образом осуществляется инжекция электронов в зону проводимости в полупроводниковых лазерах?

2.21. Как модулируется добротность в лазерах? Для чего модуляция добротности используется?

2.22. В чем преимущества четырехуровневого лазера перед трехуровневым? За счет чего улучшаются пороговые условия?

2.23. Как осуществляется одномодовый режим работы ла-

ра? Какие времена когерентности удается получить в одномодовых лазерах?

2.24. В чем состоит механизм возникновения «зернистости» лазерного луча при диффузном отражении от твердой поверхности?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1. (1-й тип). По спектру излучения тела найти его характеристики и по характеристикам тела найти спектр его излучения.

Метод решения. Прямое использование формулы излучения Планка, получающейся из нее формулы смещения Вина и формулы Стефана — Больцмана в комбинации с общими законами распространения света и энергии излучения.

3.2. (2-й тип). Зная характеристики энергетических уровней атома, найти характеристики спонтанного и вынужденного излучений и возможности их использования в квантовых генераторах и усилителях.

Метод решения. Задачи такого типа, как правило, не рассматриваются в курсе общей физики. Рассматриваются лишь отдельные частные примеры.

#### б) ПРИМЕРЫ

##### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. В спектре звезды Сириуса максимум интенсивности излучения приходится на длину волны  $\lambda_{\max} = 0,29 \cdot 10^{-6}$  м. Определить температуру поверхности Сириуса.

Решение. Используем формулу смещения Вина

$$T = \frac{2\pi hc}{4,96k\lambda_{\max}} = 10\,000 \text{ К.}$$

3.1.2. Абсолютно черное тело, имеющее форму шара радиуса  $r = 15$  см, поддерживается при постоянной температуре  $T$ . Мощность излучения тела составляет  $W = 20$  ккал/мин. Определить его температуру.

Решение. Используем формулу Стефана — Больцмана

$$U = aT^4, \quad a = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 h^3} = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}.$$

С учетом того что

$$W = cU4\pi r^2,$$

получаем  $T = \left( \frac{W}{4\pi r^2 a c} \right)^{1/4} = 545 \text{ К.}$



**3.1.3.** Вычислить величину солнечной постоянной  $P_0$ , т. е. поток солнечной лучистой энергии в минуту на квадратный сантиметр на орбите Земли. Считать, что Солнце излучает, как абсолютно черное тело, радиус Солнца  $r=700\,000$  км, радиус земной орбиты  $R=140\cdot 10^6$  км, температура поверхности Солнца  $5800$  К.

**Решение.** Пользуясь формулой Стефана — Больцмана и законом ослабления интенсивности света обратно пропорционально квадрату расстояний, получаем

$$P_0 = \frac{c\sigma T^4 4\pi r^2}{4\pi R^2} = 1,37 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2} = 1,96 \frac{\text{кал}}{\text{мин} \cdot \text{см}^2}.$$

**3.1.4.** При нагревании абсолютно черного тела длина волны  $\lambda_{\text{max}}$ , на которую приходится максимум излучения в спектре, уменьшилась в два раза. Во сколько раз увеличилась температура тела?

**Решение.** В два раза, поскольку  $T\lambda_{\text{max}} = \text{const}$ .

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Накачка рубинового лазера производится светом с длиной волны  $\lambda_0=5500$  Å, а лазерное излучение получается на длине волны  $\lambda_1=6943$  Å. Рубиновый лазер работает по трехуровневой схеме, причем метастабильным уровнем, с которого совершается переход при лазерном излучении, является средний уровень. Изобразить схему работы рубинового лазера с указанием энергетических соотношений.

**Решение.** Накачка лазера происходит фотонами с энергией

$$\varepsilon_0 = h\nu_0 = h \frac{2\pi c}{\lambda_0} = 2,25 \text{ эВ} \quad (h = 1,05 \cdot 10^{-31} \text{ Дж} \cdot \text{с}),$$

а фотоны лазерного излучения имеют энергию

$$\varepsilon_1 = h \frac{2\pi c}{\lambda_1} = 1,79 \text{ эВ}.$$

Под влиянием накачки атомы переходят на возбужденный уровень с очень малым временем жизни, из которого они практически

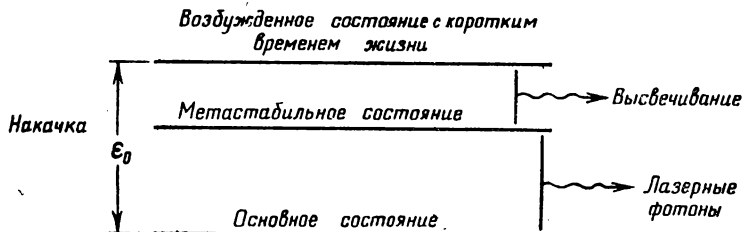


Рис. 72

мгновенно переходят на метастабильный уровень с излучением фотонов с энергией  $\epsilon_2 = \epsilon_0 - \epsilon_1 = 0,46 \text{ эВ}$ .

Время жизни метастабильного состояния равно примерно  $5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ . Переход из метастабильного состояния в основное составляет лазерные фотоны (рис. 72).

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Опишите общий характер изменения формы спектра излучения абсолютно черного тела при изменении температуры.

4.2. Простейшей моделью абсолютно черного тела является полость с небольшим отверстием, соединяющим ее с внешним пространством. По каким причинам эта модель не зависит от материала, из которого сделана полость, или, другими словами, какие свойства материалов обеспечивают такую независимость.

4.3. Какие соображения указывают на то, что индуцированное излучение имеет ту же поляризацию, то же направление распространения и ту же фазу, что и вынуждающее излучение?

4.4. Существовало ли бы ослабление пучка света, проходящего через вещество, если бы отсутствовало спонтанное излучение, а свойства индуцированного излучения оставались без изменения? Как выглядело бы при этом прохождение света через вещество?

4.5. Будем считать известным, что наблюдается спектр излучения именно абсолютно черного тела. Измерения спектра можно делать на отдельных частотах. Какое минимальное число измерений необходимо сделать, чтобы найти температуру тела?

4.6. Что такое метастабильное состояние атомов? Какой порядок времен жизни атомов в метастабильных состояниях?

4.7. Почему в рубиновых лазерах переход с верхних уровней на более нижний метастабильный уровень не приводит к возникновению лазерного излучения?

4.8. Линии излучения лазеров могут быть сделаны очень узкими. За счет каких факторов?

4.9. В каком соотношении находится монохроматичность импульса излучения лазера с продолжительностью импульса?

4.10. Принцип лазерного гироскопа известен давно под названием эффекта Саньяка. Какие особенности лазерного излучения сделали возможным осуществление лазерного гироскопа?

4.11. Единица длины — метр — в системе СИ определена как некоторое число длин волн заданного излучения. Каким образом можно осуществить отсчет нужного числа длин волн (свыше 1,5 млн.), чтобы построить масштаб в один метр?

4.12. По каким параметрам производится усреднение при вычислении корреляционной функции?

4.13. Допустим, что по некоторым причинам увеличились потери в резонаторе лазера. Что при этом произойдет с порогом генерации? Объясните качественно, без использования формул, а исходя из физического смысла порога генерации, его зависимость

от различных факторов работы лазера, в частности, как он зависит от ширины линии лазерного перехода.

4.14. Имеется ли связь между скоростью модуляции добротности и продолжительностью импульса излучения лазера?

4.15. Почему многомодовый режим работы лазера не позволяет получить большие времена когерентности?

4.16. Какое свойство излучения лазера приводит к возникновению «зернистости» лазерного луча, диффузно отраженного от твердой поверхности?

4.17. Какое свойство поверхности жидкости приводит к тому, что при диффузном отражении от нее не возникает «зернистости» лазерного луча?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Мощность излучения абсолютно черного тела, имеющего поверхность  $1 \text{ м}^2$ , равна  $100 \text{ кВт}$ . Найти температуру этого тела.

Ответ.  $T = 1300 \text{ К}$ .

5.2. Какова мощность излучения абсолютно черного тела площадью  $1 \text{ м}^2$ , если максимальная плотность излучения приходится на длину волны  $0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

Ответ.  $3,1 \cdot 10^7 \text{ Дж}$ .

5.3. Мощность излучения абсолютно черного тела равна  $10^8 \text{ кВт}$ , а максимальная плотность излучения приходится на волну  $0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Найти площадь тела.

Ответ.  $0,078 \text{ м}^2$ .

5.4. Раскаленная до  $2600 \text{ К}$  поверхность излучает  $800 \text{ Вт}$  с квадратного сантиметра. Найти отношение энергетической светимости этой поверхности к поверхности абсолютно черного тела.

Ответ.  $K = 0,5$ .

5.5. При нагревании абсолютно черного тела максимум интенсивности его излучения сместился с длины волны  $0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  на  $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Как увеличилась мощность излучения тела?

Ответ. В  $2,08$  раза.

5.6. Поток мощности в импульсе излучения лазера равен  $\langle P \rangle = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ Вт/см}^2$ . Найти электрическое поле  $E$  в импульсе.

Ответ.  $3 \cdot 10^9 \text{ В/м}$ .

5.7. Известно, что в твердотельных лазерах время релаксации энергии примерно на два порядка меньше, чем в газовых лазерах, что связано главным образом с большими потерями на рассеяние в твердотельных лазерах. Принимая для оценки порядка величин, что ширина гауссовской линии поглощения в твердотельных лазерах на два порядка больше, чем в некотором газовом лазере, оценить соотношение порядков мощности накачки в твердотельных и газовых лазерах.

Ответ. Порог мощности накачки для твердотельного лазера на четыре порядка больше, чем для газового лазера.

## Раздел XI

# ОПТИКА ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

### 1. Теоретический материал

Инвариантность плоской волны. Инвариантность фазы. Четырехмерный волновой вектор. Формулы преобразования частоты и направления распространения плоской волны. Продольный эффект Доплера. Поперечный эффект Доплера. Экспериментальные подтверждения поперечного эффекта Доплера. Аберрация света. Сравнение классических и релятивистских формул для аберрации света. Преобразование амплитуд плоской волны. Энергия плоской волны и преобразование объемов, в которых заключена электромагнитная энергия, связанная с плоской волной. Импульс цуга плоской волны. Отражение от движущегося зеркала.

### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Какие инварианты электромагнитного поля относительно преобразований Лоренца обуславливают инвариантность плоской волны?

2.2. Откуда следует инвариантность фазы волны?

2.3. Каким образом из инвариантности фазы можно вывести заключение о существовании четырехмерного вектора, называемого волновым четырехмерным вектором? Выпишите компоненты этого вектора.

2.4. Какое обстоятельство дает возможность непосредственно написать формулы преобразования частоты и направления распространения без каких-либо дополнительных вычислений или соображений?

2.5. В чем отличие продольного эффекта Доплера классической теории и релятивистской теории? При каких условиях это отличие может быть существенным?

2.6. Какой релятивистский эффект обуславливает существование поперечного эффекта Доплера?

2.7. В чем состоит отличие аберрации света по классической и релятивистской теориям? Какие релятивистские эффекты обуславливают отличие релятивистской формулы аберрации света от классической?

2.8. Цуг волн движется со скоростью света, и с ним нельзя связать какую-либо систему координат. Тем не менее можно говорить об объеме цуга волн и найти формулы преобразования этого объема при преобразованиях координат. Каким образом это делается? Как преобразуется объем цуга волн?

**2.9.** Выпишите формулы для преобразования импульса и энергии цуга волн. Какое обстоятельство дает возможность непосредственно выписать это преобразование без каких-либо дополнительных вычислений или соображений?

**2.10.** Равен ли угол отражения света от движущегося зеркала углу падения на него?

### 3. Основные типы задач и решений

#### а) ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

**3.1. (1-й тип).** Заданы частоты и направления распространения плоских волн в некоторой системе координат. Найти частоты и направления в другой системе координат.

Метод решения. Прямое использование формул преобразования частоты и направления распространения плоской волны.

**3.2. (2-й тип).** Задано распределение интенсивностей излучения в некоторой системе координат. Найти распределение интенсивностей излучения в другой системе координат.

Метод решения. Необходимо произвести преобразования величин с учетом изменения частот, направлений и объемов цугов волн.

**3.3. (3-й тип).** Заданы импульсы и энергии цугов волн и обусловленные ими явления в одной системе координат. Найти соответствующие величины в другой системе координат.

Метод решения. Воспользоваться тем, что импульс и энергия цуга волн составляют четырехмерный вектор.

#### б) ПРИМЕРЫ

##### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Пусть плоское зеркало расположено перпендикулярно оси  $x$  и движется в направлении положительных значений оси со скоростью  $v$ . Плоская волна, направление распространения которой составляет угол  $\theta_0$  с осью  $x$ , падает на зеркало. В каком направлении она отразится от зеркала?

Решение. Нам известны законы отражения от покоящегося зеркала, поэтому удобно перейти в систему координат, связанную с зеркалом. Обозначим величины, относящиеся к этой системе координат, штрихами; из формул преобразования для частоты и направления волны находим

$$\omega' = \omega_0 \frac{1 - \beta n_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega_0 \frac{1 - \beta \cos \theta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad n'_x = \frac{n_x - \beta}{1 - \beta n_x} = \frac{\cos \theta_0 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_0};$$

$$n'_y = \frac{n_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta n_x} = \frac{\sin \theta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta_0},$$

где  $n'_x$  и  $n'_y$  — косинусы углов между осями  $x'$  и  $y'$  и направ-

лением распространения луча в штрихованной системе координат, связанной с зеркалом.

Поскольку при отражении от неподвижного зеркала угол отражения равен углу падения, а частота не изменяется, сразу находим в штрихованной системе для отраженного луча:

$$\omega'_{\text{отр}} = \omega_0 \frac{1 - \beta \cos \theta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad n'_{x \text{ отр}} = - \frac{\cos \theta_0 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_0};$$

$$n'_{y \text{ отр}} = \frac{\sin \theta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \sin \theta}.$$

Возвращаясь теперь с помощью формул для преобразования частоты и направления в исходную систему координат, окончательно получим для отраженной волны выражения

$$\omega_{\text{отр}} = \omega'_{\text{отр}} \frac{1 + \beta n'_{x \text{ отр}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega_0 \frac{1 - 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2}{1 - \beta^2},$$

$$\cos \theta_{\text{отр}} = n_{x \text{ отр}} = \frac{n'_{x \text{ отр}} + \beta}{1 + \beta n'_{x \text{ отр}}} = - \frac{\cos \theta_0 - 2\beta + \beta^2 \cos \theta_0}{1 - 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2},$$

$$\sin \theta_{\text{отр}} = n_{y \text{ отр}} = \frac{n'_{y \text{ отр}} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n'_{x \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_0 (1 - \beta^2)}{1 - 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2}.$$

Эти формулы значительно упрощаются в нерелятивистском случае, когда  $\beta \ll 1$ . С точностью до величин порядка  $\beta$  они имеют вид

$$\omega_{\text{отр}} \approx \omega_0 (1 - 2\beta \cos \theta_0),$$

$$\cos \theta_{\text{отр}} \approx -\cos \theta + 2\beta \sin^2 \theta_0, \quad \sin \theta_{\text{отр}} \approx \sin \theta (1 + 2\beta \cos \theta_0),$$

т. е. получаем, что при рассматриваемом движении зеркала угол отражения больше угла падения.

## 2-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** В движущейся со скоростью  $v$  системе координат из начала координат как из точки испускается узкий пучок света в направлении, образующем угол  $\theta'$  с осью  $x'$ , причем этот пучок заключен в телесном угле  $d\Omega'$ . Какой телесный угол занимает он в неподвижной системе координат и в каком направлении распространяется?

Решение. Будем считать полярную ось сферической системы координат направленной в положительном направлении оси  $x'$ . Тогда угол  $\theta'$  является полярным углом. Элемент телесного угла в полярной системе координат дается выражением  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ , где  $\varphi'$  — угол сферической системы координат, описывающий перемещение вокруг полярной оси. Для направления луча в неподвижной системе координат сразу находим

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'},$$

а для величины телесного угла имеем

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2} d\Omega',$$

где учтено, что  $d\varphi = d\varphi'$ .

### 3-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** В движущейся со скоростью  $v$  системе координат из начала координат в направлении, образующем угол  $\theta'$  с осью  $x'$ -ов, испускается короткий импульс света, содержащий  $n$  фотонов частоты  $\omega'$ . Импульс занимает объем  $\Delta V'$ . Таким образом, плотность электромагнитной энергии в импульсе равна  $u' = n\hbar\omega'/\Delta V'$ . В каком направлении распространяется импульс и какова плотность энергии в нем в неподвижной системе координат?

**Решение.** Направление распространения дается формулами для преобразования направлений:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}, \quad \sin\theta = \frac{\sin\theta' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\cos\theta'}.$$

Для преобразования плотности необходимо воспользоваться формулами преобразования объемов цуга волн

$$\Delta V' = \Delta V \sqrt{1-\beta^2} / (1 - \beta\cos\theta)$$

и преобразования частоты. Получаем

$$u = \frac{n\hbar\omega}{\Delta V} = \frac{n\hbar\omega'}{\Delta V'} \frac{(1 + \beta\cos\theta')^2}{1 - \beta^2},$$

т. е.

$$u = u' \frac{(1 + \beta\cos\theta')^2}{1 - \beta^2}.$$

## 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Пусть тело, покоящееся в некоторой системе координат, излучает изотропно. Суммарный излучаемый в единицу времени импульс равен нулю и поэтому на тело со стороны излучения не действует никакая сила. Тело остается в покое. Рассмотрим эту ситуацию из другой системы координат, в которой излучающее тело движется равномерно и прямолинейно. В этой системе координат его излучение не будет изотропным, а ориентировано преимущественно в направлении движения тела. Следовательно, суммарный импульс излучения за единицу времени не будет равен нулю, а равен некоторой величине, совпадающей по направлению со скоростью тела. Следовательно, против скорости тела должна действовать сила, которая будет тормозить тело и уменьшать его скорость. Но это противоречит тому заключению, которое было сделано при рассмотрении ситуации в системе координат, связанной с излучающим телом. В чем дело? Устраните это противоречие.

4.2. Предположим, что из начала координат вдоль положительных направлений осей координат направлены лучи прожектора, причем они освещают конкретные точки тела отсчета, лежащие вдоль осей координат. Тело отсчета предполагается однородным. Пусть мы рассматриваем всю эту картину из системы координат, где она движется с большой скоростью в направлении оси  $x$ -ов. Лучи прожекторов, которые были направлены вдоль осей  $y'$  и  $z'$ , направлены в этой системе координат под очень малым углом к оси  $x$ -ов. Не следует ли отсюда, что тело отсчета движущейся системы координат деформировалось и стало неоднородным, т. е. не сосредоточилась ли половина его массы в узком телесном угле около оси  $x$ -ов?

4.3. Если источник излучения приближается к наблюдателю, то в силу эффекта Доплера частота наблюдаемого света увеличивается. В чем состоит различие в величине этого эффекта по предсказанию в рамках баллистической гипотезы и в рамках теории относительности?

4.4. Существует ли аналогичная (как в 4.3) разница в предсказании величины эффекта Доплера баллистической теорией и теорией относительности в случае удаления источника света?

4.5. Аберрация состоит в кажущемся изменении направления на источник света в силу относительного движения источника и наблюдателя. А каким образом наблюдается аберрация света, приходящего от звезд, если кроме кажущегося направления никакого другого направления наблюдать нельзя?

4.6. Хотя цуг волн и движется со скоростью света, можно говорить об объеме, занимаемом цугом волн. Ясно, что этот объем движется со скоростью света. Известны формулы преобразования объема цуга волн при преобразованиях координат. Нельзя ли перейти в систему координат, связанную с цугом волн, и посмотреть, чему равен там этот объем. Почему?

4.7. Откуда следует, что амплитуда плоской волны преобразуется как частота? Покажите это.

4.8. Докажите, что энергия плоских волн, заключенных в некотором объеме, преобразуется как частота.

4.9. Из каких соображений следует, что если вместо величин, характеризующих плоскую волну (частоту и волновой вектор), взять энергию и импульс плоских волн, заключенных в некотором объеме, и рассмотреть, например, вопрос об отражении от движущегося зеркала, то должен получиться один и тот же результат? Как в последнем случае следует трактовать отражение?

4.10. Пусть источник света излучает в системе координат, где он находится, во всех направлениях лучи различного цвета. Задайтесь конкретным распределением цветов лучей и проанализируйте, что будет видеть наблюдатель, когда источник будет пролетать мимо него на некотором расстоянии с достаточно большой скоростью.



## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Пусть некоторая линия излучения неподвижного источника имеет частоту  $\omega_0$ . За счет приближения источника в силу эффекта Доплера наблюдается частота  $\omega > \omega_0$ . Найти скорость приближения источника  $v$ .

Ответ.

$$v = c \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right] / \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1 \right].$$

5.2. Какой угол из-за абберации света образуется между кажущимися направлениями на звезду, расположенную в направлении, перпендикулярном плоскости вращения Земли вокруг Солнца, когда Земля находится в противоположных сторонах орбиты? Скорость движения Земли вокруг Солнца 30 км/с.

Ответ.  $\Delta\varphi \cong 2 \frac{v}{c} = 2 \cdot 10^{-4}$ .

5.3. Решить задачу об отражении света от движущегося зеркала, рассматривая энергию и импульс цуга волн и пользуясь законами сохранения. Отражение рассматривать как абсолютно упругий удар о поверхность зеркала, имеющего бесконечную массу.

Ответ. Формулы примера 3.1.1.

5.4. Рассмотрите задачу об отражении от зеркала, которое движется вдоль своей плоскости.

Ответ. Частота не изменяется, а угол падения равен углу отражения.

5.5. Наблюдатель стоит рядом с источником света частоты  $\omega_0$  и наблюдает его излучение, отраженное от зеркала, приближающегося к источнику и наблюдателю с большой скоростью так, что изображение источника приближается со скоростью, большей скорости света. Покажите, что величина эффекта Доплера не определяется скоростью кажущегося приближения изображения источника.

Ответ. Дважды применяем формулу продольного эффекта Доплера.

5.6. Реликтовое излучение является тепловым излучением с температурой  $T \approx 3$  К и образует некоторый космический фон. При движении тела относительно этого космического фона реликтовое излучение воспринимается как анизотропное в силу изменения наблюдаемых частот и преобразования направлений. Поэтому измеряемая температура реликтового излучения зависит от угла  $\theta'$  между скоростью тела и рассматриваемым направлением. Найти выражение для температуры, измеряемой наблюдателем, движущимся относительно космического фона, связанного с реликтовым излучением.

Ответ.  $T'(\theta') = \frac{T \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta'}, \beta = \frac{v}{c}$ .

Цена 90 коп.

